Министерство общего и профессионального образования Свердловской области

государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Свердловской области
«Ирбитский мотоциклетный техникум» (ГАПОУ СО «ИМТ»)

ПРОГРАММА ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ СРЕДНЕГО ЗВЕНА

ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ

09.02.04 ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ (ПО ОТРАСЛЯМ)

МЕТОЧИСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН. 03. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧСЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН. 03. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
по специальности среднего профессионального образования
09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Разработчик: И.В. Кротова, преподаватель ГАПОУ СО «ИМТ»

Методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине ЕН. 03. Теория вероятностей и математическая статистика разработан в соответствии с рабочей программой.

ГАПОУ СО «ИМТ», г. Ирбит

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания для студентов по выполнению практических работ по дисциплине ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика предназначены для студентов специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям). Составлены в соответствии с утвержденной рабочей программой дисциплины ЕН.03 на основе требований Федерального государственного образовательного стандарта по специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям).

Методические указания разработаны **с целью** создания учебно-методического обеспечения реализации дисциплины ЕН.03 Участие в организации производственной деятельности структурного подразделения в ГАПОУ СО «ИМТ».

Выполнение практических работ позволяет закрепить и систематизировать теоретические знания и приобрести практические навыки по отдельным темам, формировать навыки самостоятельной работы у студентов, а также учебно-познавательные и социально-трудовые компетенции.

Методические указания содержат: требования к оформлению отчёта по практическим работам, перечень практических работ и инструкционные карты к выполнению работ. Количество практических работ и их тематика соответствуют рабочей программе по ЕН.03.

Каждая инструкционная карта содержит тему и цель работы, обеспечение занятия, содержание работы, контрольные вопросы для закрепления материала по соответствующей теме.

Методические указания созданы в помощь для работы на занятиях, подготовки к практическим работам, правильного составления отчетов.

Приступая к выполнению практической работы, необходимо внимательно прочитать цель и задачи занятия, краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы, ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

Наличие положительной оценки по практическим работам необходимо для получения зачета по дисциплине, поэтому в случае отсутствия на уроке по любой причине или получения неудовлетворительной оценки за практическую необходимо найти время для ее выполнения или пересдачи.

Правила выполнения практических работ

1. Студент должен прийти на практическое занятие подготовленным к выполнению практической работы.
2. После проведения практической работы студент должен представить отчет о проделанной работе.
3. Отчет о проделанной работе следует выполнять тетради по практическим работам.

Оценку по практической работе студент получает, если:

- студентом работа выполнена в полном объеме;
- студент может пояснить выполнение любого этапа работы;
- отчет выполнен в соответствии с требованиями к выполнению

работы;

- студент отвечает на контрольные вопросы на удовлетворительную оценку и выше.

Зачет по выполнению практических работ студент получает при условии выполнения всех предусмотренных программой практических работ после сдачи журнала с отчетами по работам и оценкам.

Внимание! Если в процессе подготовки к практическим работам или при решении задач возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений или указаний в дни проведения дополнительных занятий.

Порядок выполнения отчета по практической работе

1. Ознакомиться с теоретическим материалом по практической работе.

2. Выполнить предложенное задание согласно варианту по списку группы.

3. Продемонстрировать результаты выполнения предложенных заданий преподавателю.

4. Составить по практической работе отчет.

5. Ответить на контрольные вопросы.

Практическая работа № 1

Тема «Решение задач на вычисление перестановок в MS Excel»

Цель решение задач на вычисление перестановок в MS Excel, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Перестановки. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, то есть могут быть получены из того же самого множества перестановкой местами элементов, называются перестановками этого множества.
Пример типовой задачи на вычисление перестановок: сколько способов существует для того, чтобы расставить 5 различных книг на книжной полке?
Важен порядок, количество элементов сохраняется, значит – перестановка. Это частный случай размещений.

Ход выполнения задания

1. Запустить программу для работы с электронными таблицами (Пуск-Программы-Microsoft Office-Excel).

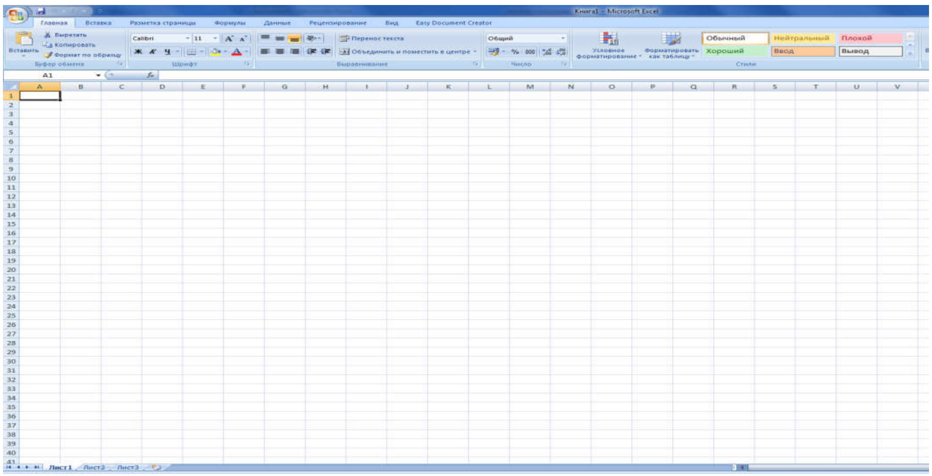


Рисунок 1. Интерфейс программы

2. Сохранить файл в своем рабочем каталоге на диске D (Файл- Сохранить как...).
3. Переименовать «Лист1» .

Вычисление перестановок можно выполнить с использованием функции ПЕРЕСТ(n;n). Заметьте, что оба параметра у данной функции в данном случае будут ссылаться на одну и ту же ячейку, так как количество элементов сохраняется.
1 В ячейку A1 введите текст «Перестановки», объедините ее с ячейкой B1.
2 В ячейки A2 и B2 введите текст «Число элементов» и «Число перестановок», соответственно.
3 Отформатируйте данные заголовки.
4 В ячейку A3 введите формулу для вычисления перестановок.
5 Решите типовую задачу, указанную выше.
6 Скопируйте формулу на 6 строк ниже.

Самостоятельно с использованием данного шаблона решите следующие комбинаторные задачи (для вычислений можно использовать свободные ячейки, если явно в условии задачи не указано количество элементов множества и выбираемого подмножества):

1. Сколькими различными маршрутами можно разнести корреспонденцию по 5 адресам?
2. Сколько словарей нужно издать, чтобы переводить с любого из 5 языков на любой другой из этих языков?
3. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг?

4.Сколькими способами можно составить список из шести человек?

Контрольные вопросы.

1. Какие задачи называются комбинаторными?
2. Что называется перестановкой из n элементов?
3. По какой формуле вычисляют число перестановка из n элементов?

Практическая работа № 2

Тема «Решение задач на вычисление размещений в MS Excel»

Цель решение задач на вычисление размещений в MS Excel, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Размещения. Различные упорядоченные k-элементные подмножества множества из n элементов называются размещениями из n элементов по k. Размещения отличаются друг от друга либо элементами, либо их порядками следования.

Пример типовой задачи на вычисление размещений: в группе 5 девушек и 8 юношей. Для представительства этой группы на конференции выбирают 4 человека, которым присваиваются номера для выступления на данной конференции. Сколько различных вариантов составления такой группы можно построить?
В данной задаче будет меняться как состав подмножества, так и порядок элементов данного подмножества.
Поэтому применяется формула для вычисления размещений.

Ход выполнения задания

1. Запустить программу для работы с электронными таблицами (Пуск-Программы-Microsoft Office-Excel).

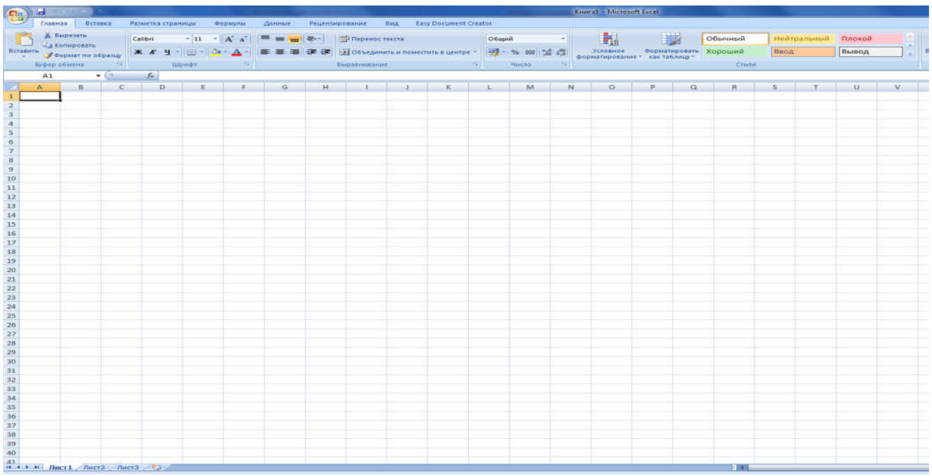


Рисунок 1. Интерфейс программы

2. Сохранить файл в своем рабочем каталоге на диске D (Файл- Сохранить как...).
3. Переименовать «Лист1» .

4. Вычисление размещений средствами MS Excel можно реализовать с применением функции ПЕРЕСТ(n;k), где n – число элементов исходного множества, а k – число элементов выбранного подмножества.
5. . На соответствующем листе введите заголовок в ячейку А1 («Размещение»).
6. В ячейку А2 введите текст «Общее число исходов», в ячейку В2 – «Число элементов подмножества», в ячейку С2 – «Число размещений».
7. Объедините ячейки А1, В1 и С1. Для этого выделите соответствующие ячейки и выберите пункт «Формат ячеек» из меню «Формат», либо из контекстного меню. В открывшемся окне активируйте пункт «Объединение ячеек». Нажмите ОК.
8. В ячейку С3 введите вышеуказанную функцию для вычисления размещений.

9. Решите задачу, указанную как типовую в данном задании.
10. Скопируйте формулу на 10 ячеек вниз.

Самостоятельно с использованием данного шаблона решите следующие комбинаторные задачи (для вычислений можно использовать свободные ячейки, если явно в условии задачи не указано количество элементов множества и выбираемого подмножества):

1 Студентам нужно сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов?

2 Сколькими способами могут быть заняты первое, второе и третье места (по одному человеку на место) на соревнованиях, в которых участвуют: 1) 5 человек; 2) 6 человек?

3 Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

4 Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м?

5 Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 7 различных цветов?

6 Сколькими способами могут быть распределены первая, вторая и третья премии между 15 участниками конкурса?

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются комбинаторными?
2. Что называется размещением из n элементов по k?
3. По какой формуле вычисляют число размещений из n элементов по k?

Практическая работа № 3

Тема «Решение задач на вычисление сочетаний в MS Excel»

Цель: решение задач на вычисление сочетаний в MS Excel, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Сочетания. Произвольное k-элементное подмножество данного множества из n элементов называется сочетанием из N элементов по k. порядок элементов в сочетании не существенен. Пример типовой задачи на сочетания: имеется 2 красных и 5 желтых тюльпанов; букет составляют из 3-х цветков; сколько различных вариантов составления букета? Здесь берется подмножество из 3-х элементов из множества, состоящего из 7-ми элементов, порядок совершенно не важен.

3. Число сочетаний можно вычислить с помощью функции ЧИСЛОКОМБ(n;k), которая относится к математическим функциям.

Ход выполнения задания

1. Запустить программу для работы с электронными таблицами (Пуск-Программы-Microsoft Office-Excel).

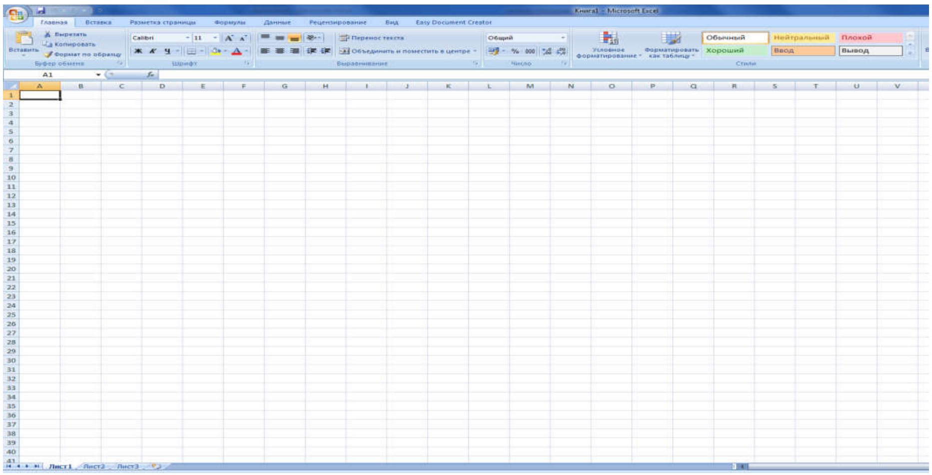


Рисунок 1. Интерфейс программы

2. Сохранить файл в своем рабочем каталоге на диске D (Файл- Сохранить как...).
3. Переименовать «Лист1» .

4. На соответствующем листе введите заголовок в ячейку A1 («Сочетания»).
5. В ячейку A2 введите текст «Общее число элементов», в ячейку B2 – «Число элементов подмножества», в ячейку C2 – «Число сочетаний».
6. Объедините ячейки A1, B1 и C1. Для этого выделите соответствующие ячейки и выберите пункт «Формат ячеек» из меню «Формат», либо из контекстного меню. В открывшемся окне активируйте пункт «Объединение ячеек». Нажмите ОК.

7. Измените формат ячеек с заголовками согласно предыдущему заданию.

8. В ячейку C3 введите формулу для вычисления сочетаний: =ЧИСЛКОМБ(A3;B3) Данную формулу вы можете ввести двумя способами: либо вручную, набрав ее с клавиатуры, либо с использованием мастера функций, пиктограмма для которого находится в строке формул окна электронной таблицы.

9. Подставьте значения, указанные в примере выше, для вычисления числа сочетаний.
10. Скопируйте данную формулу на 10 строк ниже.

Самостоятельно с использованием данного шаблона решите следующие комбинаторные задачи (для вычислений можно использовать свободные ячейки, если явно в условии задачи не указано количество элементов множества и выбираемого подмножества):

1 Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов, при которых в эту «пятерку» попадут: а) одни девушки; б) 3 юноши и 2 девушки; в) 1 юноша и 4 девушки; г) 5 юношей?

2 Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 4 офицера и 8 солдат?

3 В урне 6 белых и 4 черных шара. Сколькими способами можно извлечь 2 белых и 3 черных шара?

4 В урне 5 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать: а) 2 шара разных цветов; б) 2 белых шара; в) 2 черных шара? 7

5 Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

6 В библиотеке читателю предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Сколькими способами он может выбрать из них 3 книги и 2 журнала?

Контрольные вопросы

1. Каким задачи называюися комбинаторными
2. Что называется сочетанием из n элементов по k?
3. По какой формуле вычисляют число сочетаний из n элементов по k?

Практическая работа № 4

Тема «Решение задач с применением элементов комбинаторики»

Цель: научиться решать простейшие комбинаторные задачи.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Пусть дано множество, состоящее из n элементов. *Размещением* из n элементов по m $(0 \le m \le n)$ элементов называется упорядоченное множество, содержащее m различных элементов данного множества. Из определения вытекает, что размещения из n элементов по m элементов - это все m –элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования. Число всех возможных размещений из n элементов по m элементов обозначают A_n^m и вычисляют по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1). \quad \text{или} \quad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1)$$

Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$ и $(n-m)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-m-1)(n-m)$. Условимся считать 0! = 1, поэтому $A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1$.

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов. Число всех возможных перестановок из n элементов обозначают P_n. Из определения перестановок следует

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!\ , \quad \text{т.е} \quad P_n = n! \qquad (2)$$

Сочетанием из n элементов по m $(0 \le m \le n)$ элементов называется любое подмножество, которое содержит m различных элементов данного множества. Следовательно, сочетания из n элементов по m элементов - это все m - элементные подмножества n - элементного множества, причем различными подмножествами считаются только те, которые имеют неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов, не считаются различными.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначают C_n^m и вычисляют по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-m+1)}{m!}. \qquad (3)$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (4)$$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. В группе из 30 учащихся нужно выбрать комсорга, профорга, физорга. Сколькими способами это можно сделать, если каждый из 30 учащихся комсомолец, член профсоюза и спортсмен?
Решение: искомое число способов равно числу размещений из 30 элементов по 3 элемента, т.е. A_{30}^{3}. Положив по формуле (1) $n = 30$, $m = 3$, получаем $A_{30}^{3} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$.
Ответ: 24360 способов.

Пример 2. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?
Решение: Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Ответ: 720 способов расстановки.

Пример 3. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?
Решение: т.к. порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^{4} способами. По формуле (4) находим $C_{25}^{4} = \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650$.
Ответ: 12650 способов.

Задания для практического занятия:

Задание для 1 **в**арианта:

1. Студентам нужно сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов?
2. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, из которых ровно 3 лежат на одной прямой?
3. Имеется 5 конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для письма?
4. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов, при которых в эту «пятерку» попадут: а) одни девушки; б) 3 юноши и 2 девушки; в) 1 юноша и 4 девушки; г) 5 юношей?
5. В урне 6 белых и 4 черных шара. Сколькими способами можно извлечь 2 белых и 3 черных шара?
6. Группа шахматистов сыграла между собой 28 партий. Каждые два из них встречались между собой один раз. Сколько шахматистов участвовало в соревнованиях?
7. Есть пятиразрядный цифровой замок. Кодовое устройство замка состоит из пяти вращающихся дисков, каждый из которых имеет шесть цифр от 0 до 5. Только одна (правильная) комбинация позволяет открыть замок. Найти число возможных комбинаций.

Задание для 2 варианта:

1. Сколькими различными маршрутами можно разнести корреспонденцию по 5 адресам?

2. Из трех классов спортивной школы нужно составить команду из трех человек, взяв по одному ученику из каждого класса. Сколько различных команд можно составить, если в классах соответственно 18, 20 и 22 ученика?
3. Сколько словарей нужно издать, чтобы переводить с любого из 5 языков на любой другой из этих языков?
4. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 4 офицера и 8 солдат?
5. В комнате имеется 7 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 7 гостей? 3 гостя?
6. В урне 5 белых и 8 черных шаров. Сколькими способа- ми можно выбрать: а) 2 шара разных цветов; б) 2 белых шара; в) 2 черных шара? 7
7. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются комбинаторные?
2. Какие основные элементы комбинаторики вы знаете? Дайте их определения и перечислите формулы для их вычисления.

Практическое занятие №5

Тема «Вычисление вероятностей событий

по классической формуле определения вероятности».

<u>Цель:</u> вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Задачи

1. В урне имеется 20 шаров, среди которых 12 красного цвета. Из урны наудачу извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что извлеченные шары не красные.

2. В партии из 15 деталей имеется 3 стандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 2 стандартных.

3. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

4. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

Контрольные вопросы

1. Какое событие называют достоверным?
2. Какое событие называют невозможным?
3. Дайте определение противоположных событий.
4. Сформулируйте классическое определение вероятности.
5. Чему равна вероятность достоверного события?
6. Чему равна вероятность невозможного события?
7. Каким неравенствам удовлетворяет вероятность любого события?
8. Что называется относительной частотой события?

Практическое занятие №6

Тема «Вычисление вероятностей сложных событий».

Цель: решение задач на вычисление сложных событий, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Задачи

1. В коробке находятся 4 розовых, 3 зеленых, 2 голубых и 1 белый кубик. Из коробки извлекают один кубик. Какова вероятность того, что из коробки извлечен зеленый кубик.
2. Два вентилятора работают независимо друг от друга. Вероятность поломки первого вентилятора 0,1; для второго - 0,3. Найти вероятность того, что в данный момент выйдет из строя только один вентилятор.
3. Имеются 2 урны, в каждой из которых находится по 10 шаров, причем в 1-й урне 7 белых и 3 черных шара, во 2-й - 2 белых и 8 черных. Некто подходит наудачу к одной из урн и вынимает шар. Найти вероятность того, что вынут белый шар.
4. Три эксперта независимо друг от друга дают правильное заключение о возможности строительства в данной местности АЭС с вероятностями p1=0,8; p2=0,7; p3=0,9 соответственно. Найти вероятность правильного заключения хотя бы одним из экспертов (событие А).
5. Имеются 2 урны, в каждой из которых находится по 10 шаров, причем в 1-й урне 7 белых и 3 черных шара, во 2-й - 2 белых и 8 черных. Некто подходит наудачу к одной из урн и вынимает шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что он вытянут из 2-й урны.

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте теорему умножения событий.
2. Сформулируйте теорему сложения событий.
3. Напишите формулу условной вероятности.
4. Напишите формулу полной вероятности.

Практическая работа №7

Тема: «Решение задач на вычисление характеристик непрерывной случайной величины».

Цель_ вычисление характеристик непрерывной случаиной величины, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов

Задачи для решения:

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X,* Заданной плотностью распределения на отрезке [0, 1]:

$$f(x) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

2. Найти основные числовые характеристики непрерывной случайной величины *X,* заданной функцией распределения на положительной полуоси *Ox:*

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \in (0, \infty).$$

3. Найти среднеквадратическое отклонение случайной величины *X,* распределенной равномерно на интервале (1, 5).

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a; \\ 1/(b-a), & a < x \leqslant b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

4. Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, соответственно равными 10 и 5. Найти вероятность того, что *X* примет значение на интервале (20, 30).

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left((\beta - a)/\sigma\right) - \Phi\left((\alpha - a)/\sigma\right),$$

5. Магазин производит продажу мужских костюмов. По данным статистики, распределение по размерам является нормальным с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, соответственно равными 48 и 2. Определить процент спроса на 50-й размер при условии разброса значений этой величины в интервале (49, 51).

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left((\beta - a)/\sigma\right) - \Phi\left((\alpha - a)/\sigma\right),$$

Контрольные вопросы:

1. Непрерывная случайная величина это
2. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется
3. **.** Дисперсией непрерывной случайной величины X называется
4. Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется
5. Распределение вероятностей называется равномерным-
6. Модой называется-
7. Медианой называется-

Практическая работа №8

Тема: «Решение задач на вычисление характеристик дискретной случайной величины».

Цель вычисление характеристик дискретной случайной величины, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов

Задачи для решения:

1.Математическое ожидание и дисперсия СВ X соответственно равны 0,5 и 5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2X-3$.

2. Случайные величины X и Y независимы, причем $D(X)=3$ и $D(Y)=5$. Найти $D(Z)$, если $Z=4\cdot X-5\cdot Y+3$.

3. Закон распределения ДСВ X задан таблицей распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	c

Найти: c, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P\{X<3\}$.

8.

4. Функция распределения ДСВ X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0{,}2, & 0<x\le 1,\\ 0{,}6, & 1<x\le 2\\ 0{,}9, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

9.

Найти: $M(X)$, $M(X^2)$ $D(X)$, $\sigma(X)$.

5. Независимые случайные величины X и Y заданы таблицами распределения вероятностей

x_i^2	10	20
p_i	0,2	0,8

y_i^2	30	40	50
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти $D(X+Y)$ двумя способами:
1. Составив предварительно таблицу распределения СВ $Z=X+Y$;
2. Используя правило сложения дисперсий.

Контрольные вопросы
1. Дискретная случайная величина это
2. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X
3. Дисперсией дискретной случайной величины X
4.Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины определяется

Практическая работа № 9,10

«Построение графической диаграммы выборки, расчёт характеристик выборки»

Цель: научиться строить графические диаграммы выборки, рассчитывать характеристики выборки

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

В самых различных областях производственной и научной деятельности приходится проводить изучение (обследование, измерение, проверку) объектов, принадлежащих некоторой совокупности, по какому-либо признаку. При этом иногда приходится исследовать каждый объект совокупности, т. е. проводить сплошное исследование. Однако на практике гораздо чаще применяется выборочное исследование. При выборочном исследовании из всей совокупности отбирают некоторым образом определенное число объектов и только их подвергают исследованию. При этом совокупность всех исследуемых объектов называют *генеральной совокупностью.*

Выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности. Под *случайным отбором* при образовании выборки понимают такой отбор, при котором все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Выборку можно проводить двумя основными способами. При первом способе объект извлекают из генеральной совокупности, исследуют и возвращают в исходную генеральную совокупность; затем снова извлекают некоторый объект, исследуют и возвращают в генеральную совокупность и т. д. Полученную таким образом выборку называют *повторной.* При втором способе после исследования объекты в генеральную совокупность не возвращают, и выборку в этом случае называют *бесповторной*.

Число объектов выборочной или генеральной совокупности называют *объемом выборки*. Например, если из 10 000 изделий для контроля отобрано 100 изделий, то объем генеральной совокупности N=10 000, а объем выборки n=100.

Для того чтобы по выборке можно было с определенной уверенностью судить о всей генеральной совокупности, выборка должна достаточно полно отражать изучаемое свойство объектов генеральной совокупности,т.е быть *репрезентативной*. Для этого необходимо, чтобы отбор объектов в выборку осуществлялся действительно случайно и чтобы изучаемому свойству была присуща статистическая устойчивость .

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n , \qquad (1)$$

Разность между наибольшим значением числовой выборки и ее наименьшим значением называют *размахом выборки*.

Наблюдавшиеся значения x_i признака X называются *вариантами*, а неубывающую последовательность вариант называют *вариационным рядом.*

Пусть при исследовании некоторой генеральной совокупности получена числовая выборка объема n, причем значение x_1 встретилось в выборке n_1 раз, значение x_2 - n_2 раз, ..., значение x_k — n_k раз. Числа n_1 , n_2 , …, n_k называют *частотами*, а их отношения к объему выборки, т. е. отношения $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \dots \frac{n_k}{n}$ - *относительными частотами* соответствующих значений $x_1, x_2, x_3, \dots x_k$ выборки. Очевидно, что сумма частот равна объему выборки, а сумма относительных частот равна единице, т. е.

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n \quad , \qquad \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_k}{n} = 1 \qquad (2)$$

Последовательность пар $(x_1 ; n_1); (x_2 ; n_2); (x_3 ; n_3); \dots (x_k ; n_k)$

называют *статистическим рядом.* Обычно статистический ряд записывают в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_k
n_1	n_2	n_3	…	n_i	…	n_k

(3)

Следующей таблицей задается так называемое *выборочное распределение*, в которой указываются все значения выборки и их соответствующие относительные частоты:

x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_k
$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	…	$\frac{n_i}{n}$	…	$\frac{n_k}{n}$

(4)

Графические изображения выборки. Полигон и гистограмма

Для наглядного представления о выборке часто используют различные графические изображения выборки. Простейшими изображениями выборки являются полигон и гистограмма. Пусть выборка задана вариационным рядом: $(x_1 ; n_1); (x_2 ; n_2); (x_3 ; n_3); \dots (x_k ; n_k)$. *Полигоном частот* называют ломаную с вершинами в указанных точках.

Полигоном относительных частот называют ломаную с вершинами в точках

$$(x_1 ; \frac{n_1}{n}); (x_2 ; \frac{n_2}{n}); (x_3 ; \frac{n_3}{n}); \dots (x_k ; \frac{n_k}{n})$$

Ясно, что полигон относительных частот получается из полигона частот сжатием вдоль оси ординат в n раз, где n — объем выборки.

При большом объеме выборки более наглядное представление о ней дает *гистограмма*. Чтобы построить гистограмму частот, промежуток от наименьшего значения выборки до наибольшего ее значения разбивают на несколько частичных промежутков длины h. Для каждого частичного промежутка вычисляют сумму s_i частот значений выборки, попавших в этот промежуток. Значение x_i выборки, совпавшее с правым концом промежутка, относят к следующему промежутку (если x_i — не наибольшее значение выборки). Затем на каждом частичном промежутке, как на основании, строят прямоугольник с высотой $\frac{s_i}{h}$. Объединение всех построенных таким образом прямоугольников называют *гистограммой частот*. Итак, гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых являются частичные промежутки длины h, а высотами — отрезки длины $\frac{s_i}{h}$, где s_i — сумма частот значений выборки, попавших
в i-й промежуток.

Из определения гистограммы ясно, что ее площадь равна объему выборки.

При решении задач в зависимости от объема выборки в большинстве случаев целесообразно брать 10-20 частичных промежутков.

Аналогично определяют и строят гистограмму относительных частот.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых являются частичные промежутки длины h, а высотами — отрезки длины $\frac{w_i}{h}$, где w_i - суммы относительных частот значении выборки, попавших в i-й промежуток. Площадь гистограммы относительных частот, очевидно, равна единице.

Пусть имеется некоторая выборка объема n: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$. *Выброчной средней* называется среднее арифметическое значений выборки:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (5)$$

Если выборка задана статистическим рядом (3) или выборочным распределением (4), то формулу (5) естественно записать в следующем виде:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \qquad (6)$$

Выборочной дисперсией называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней.

$$S_0 = \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \qquad (7)$$

Если выборка задана статистическим рядом (3) или выборочным распределением (4), то формулу (7) можно записать так:

$$S_0 = \frac{n_1\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + n_2\left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + n_k\left(x_k - \bar{x}\right)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_k\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \qquad (8)$$

Формулы (7) и (8) можно преобразовать к более удобному для вычислений виду:

$$S_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = (\bar{x^2}) - (\bar{x})^2 \qquad (9)$$

т. е. выборочная дисперсия равна среднему квадратов значений выборки без квадрата выборочной средней.

Исправленной выборочной дисперсией называется

$$S = \frac{n}{n-1} S_0 \qquad (10)$$

где S_0 — выборочная дисперсия, n — объем выборки. Отсюда, используя формулу (7),

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (11)$$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Составить для выборки 1, 10, -2, 1,0, 1, 10, 7, -2, 10, 10, 7 вариационный ряд и найти ее размах.

Решение: записав заданную выборку в виде неубывающей последовательности, получим вариационный ряд

-2,-2,0, 1, 1, 1,7,7, 10, 10, 10, 10.

Размах данной выборки равен 10 - (-2) =12.

Пример 2 Для выборки 3,8,-1,3, 0, 5,3,-1,3, 5 определить объем и размах. Записать выборку в виде вариационного ряда и в виде статистического ряда. Найти выборочное распределение. Построить полигон частот.

Решение: Объем выборки n = 10, ее размах равен 8 - (-1) = 9. Записав значения выборки в виде неубывающей последовательности получим вариационный ряд

-1,-1,0, 3,3, 3,3, 5, 5, 8.

Статистический ряд можно записать в виде последовательности пар чисел - (-1;2), (0;1), (3;4), 5;2), (8;1) или в виде таблицы

-1	0	3	5	8
2	1	4	2	1

Для контроля находим сумму частот: 2+ 1 +4 + 2+ 1 = 10 и убеждаемся в том, что она равна объему выборки.

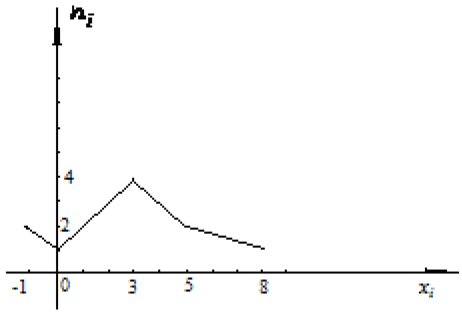
Вычислив относительные частоты, найдем выборочное распределение:

-1	0	3	5	8
$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Для контроля убеждаемся в том, что сумма относительных частот равна единице:

$$\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{4}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=1.$$

Полигон частот для заданной выборки имеет вид:



Пример 3. При измерении напряжения в электросети получена следующая выборка:

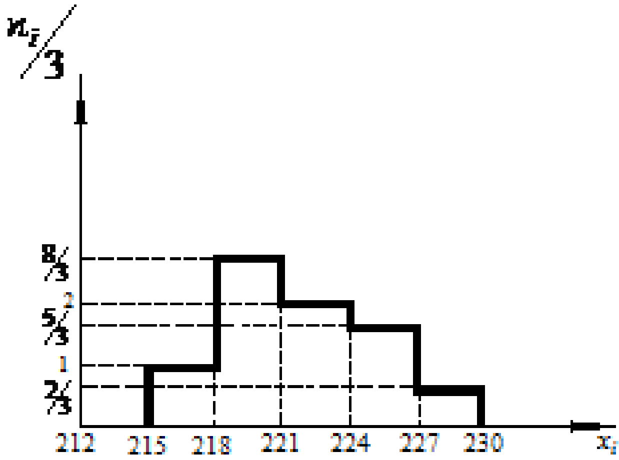
218, 221, 215, 225, 225, 217,
224, 220, 220, 219, 221, 219,
222, 227, 218, 220, 223, 230,
223, 216, 224, 227, 220, 222

(данные выражены в вольтах). Построить гистограмму частот, если число частичных промежутков равно 5.

Решение: наименьшее значение выборки равно 215, наибольшее — 230.

Находим длину частичных промежутков $h=\frac{230-215}{5}=3$. Подсчитываем с учетом кратности число значений выборки, попавших в каждый промежуток.

Для первого промежутка [215; 218) это число равно 3, для второго [218; 221) оно равно 8, для третьего [221; 224) — 6, для четвертого [224; 227) — 5, для пятого [227; 230] — 2. Следовательно, высоты прямоугольников (слева направо), образующих гистограмму, равны $1, \frac{8}{3}, 2, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}$ По полученным данным строим гистограмму



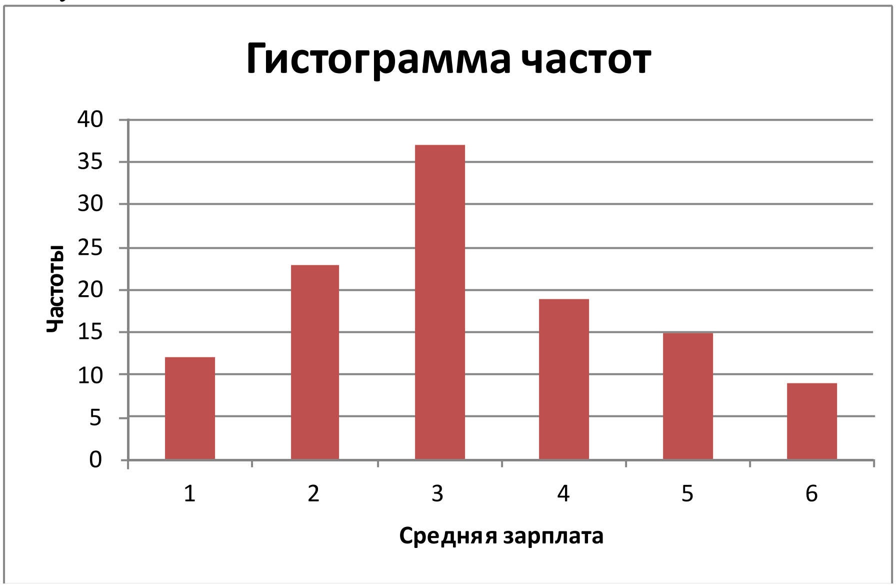
Для контроля убеждаемся в том, что площадь гистограммы равна объему выборки:

$$3\left(1+\frac{8}{3}+2+\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\right)=24$$

Пример 4. На основании данных о средней заработной плате работников в области в тыс. руб., которые помещены в интервальный вариационный ряд в таблицу, построить гистограмму распределения частот зарплаты работников:

Заработная плата	**1-3**	**3-5**	**5-7**	**7-9**	**9-11**	**11-13**
Число Работников	**12**	**23**	**37**	**19**	**15**	**9**

Решение: при построении гистограммы по оси абсцисс откладываются значения изучаемого признака (границы интервалов), а по оси *y* – соответствующие частоты, в том случае, если интервалы одинаковой величины. Используя мастер диаграмм в MS Excel, получим гистограмму:



Гистограмма распределения частот зарплаты работников

Пример 3. Для выборки 4,5,3,2, 1,2,0,7,7,3 найти выборочную среднюю $\bar{x}$, выборочную дисперсию S_0, исправленную выборочную дисперсию S.

Решение: объем выборки $n = 10$. По формуле (5) находим выборочную среднюю:

$$\bar{x} = \frac{4+5+3+2+1+2+7+7+3}{10} = 3{,}4$$

Чтобы найти выборочную дисперсию, воспользуемся формулой (9). Для этого вычислим среднее квадратов значений выборки:

$$(\overline{x^2}) = \frac{4^2+5^2+3^2+2^2+1^2+2^2+7^2+7^2+3^2}{10} = 16{,}6$$

Теперь по формуле (9) находим $S_0 = 16{,}6 - 3{,}4^2 = 5{,}04$. Наконец, используя формулу (10), вычисляем исправленную выборочную дисперсию:

$$S = \frac{10}{9} \cdot 5{,}04 = 5.6$$

Пример 4. Для выборки 3,8-1,3,0,5,3,4,3,5 найти выборочную среднюю $\bar{x}$, выборочную дисперсию S_0, исправленную выборочную дисперсию S.

Решение: статистический ряд для для данной выборки имеет вид

-1	0	3	5	8
2	1	4	2	1

Объем выборки n=10. Выборочную среднюю найдем по формуле (6):

$$\bar{x} = \frac{2(-1)+4\cdot 3+2\cdot 5+1\cdot 8}{10} = 2{,}8$$

Вычислим среднее квадратов значений выборки:

$$(\overline{x^2}) = \frac{2(-1)^2+4\cdot 3^2+2\cdot 5^2+1\cdot 8^2}{10} = 15{,}2$$

Согласно формуле (9) находим выборочную дисперсию:

$S_0 = 15{,}2 - 2{,}8^2 = 7{,}36$.

Для вычисления исправленной выборочной дисперсии воспользуемся формулой (10):

$$S = \frac{10}{9} \cdot 7{,}36 = 8{,}18$$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Для выборки 1,1,2,-5,4,3,3,8,8,1 определите объем и размах. Запишите выборку в виде вариационного ряда и в виде статистического ряда. Найдите выборочное распределение.

2. Для выборки, заданной статистическим рядом

2	4	6	8
5	2	1	3

постройте 1) полигон частот; 2) полигон относительных частот;

3. Для выборки, заданной вариационным рядом -5, -5, 2, 3, 5,10,15, 15, 20, 20, найдите выборочную среднюю $\bar{x}$; выборочную дисперсию S_0, несмещенную выборочную дисперсию S.

Вариант 2

1. Для выборки -3,1,2,4,3,4,4,1,2,1 определите объем и размах. Запишите выборку в виде вариационного ряда и в виде статистического ряда. Найдите выборочное распределение.

2. Для выборки, заданной статистическим рядом

-1	1	3	7
1	3	4	2

постройте 1) полигон частот; 2) полигон относительных частот

3. Для выборки, заданной статистическим рядом

-1	1	3	5	7	9
2	2	1	3	1	1

найдите выборочную среднюю $\overline{x}$; выборочную дисперсию S_0, несмещенную выборочную дисперсию S;

Контрольные вопросы

1. Что называют: а) генеральной совокупностью; б) выборочной совокупностью; в) объемом выборки?
2. Дайте определение вариационного ряда. Что называют размахом выборки?
3. Как для данной выборки получают статистический ряд и выборочное распределение?
4. Какие графические изображения выборок вы знаете?
5. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?
6. Дайте определение выборочных характеристик: а) выборочной средней;
б) выборочной дисперсии;
7. Как связаны между собой выборочная дисперсия и исправленная выборочная дисперсия?

Практическая работа №11

Тема «Интервальное оценивание вероятности события»

Цель: научиться находить интервал для оценки вероятности события и объем выборки

Основные понятия и формулы	
Доверительный интервал и доверительная вероятность	
Точечная оценка оцениваемого параметра θ Доверительный интервал Доверительная вероятность(надежность)	θ_n $[\theta_{min}; \theta_{max}],\ где \theta_{min} = \theta_n \quad \delta,\ \theta_{max} = \theta_n + \delta$ $P(\theta_{min} < \theta < \theta_{max}) = \gamma$
Интервальная оценка математического ожидания $X \in N(\mu; \sigma^2)$	
Дисперсия известна $P\left(\bar{x} \quad t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t_\gamma) = \gamma$	Дисперсия не известна $P\left(\bar{x} \quad t_{\gamma_t} \frac{S}{\sqrt{n \quad 1}} < \mu < \bar{x} + t_{\gamma_t} \frac{S}{\sqrt{n \quad 1}}\right) = \gamma$
Интервальная оценка среднего квадратичного отклонения $X \in N(\mu; \sigma^2)$ $P(max\{0; S(1 \quad q)\} < \sigma < S(1+q)) = \gamma$	
Интервальная оценка вероятности события $P\left(w \quad t_\gamma \sqrt{\frac{w(1 \quad w)}{n}} < p < w + t_\gamma \sqrt{\frac{w(1 \quad w)}{n}}\right) = 2\Phi(t_\gamma) = \gamma$	
Основные умения и навыки (цели): • описывать случайную величину с помощью доверительных интервалов; • находить интервальные оценки основных характеристик;	

Примеры задач:

1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение σ = 5, выборочная средняя $\bar{x}$= 14 и объем выборки n = 25.

Требуется найти доверительный интервал

$P\left(\bar{x} \quad t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t_\gamma) = \gamma,$

Решение Все величины, кроме t, известны. Найдем t из соотношения Ф(t)=0,95/2=0,475. По таблице приложения 2 находим t_γ = 1,96. Подставив t = 1,96, $\bar{x}$= 14, σ = 5 n=25 , окончательно получим искомый доверительный интервал 12,04 < a < 15,96.

2. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания а генеральной совокупности по выборочной средней равна δ = 0,3, если известно среднее квадратическое отклонение σ = 1,2 нормально распределенной генеральной совокупности.

Решение. Воспользуемся формулой, определяющей точность оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочной средней: $\delta = t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$., отсюда $n \quad = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$.

По условию γ =0,975; следовательно, Ф(t) =0,975/2 = 0,4875. По таблице приложения 2 найдем t =2,24, Подставив t =2,24, σ =1, 2 и δ = 0,3 , получим искомый объем выборки n = 81

Задачи:

1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания а нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное сред нее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя Xв и объем выборки n: а) $\bar{x}$= 10,2, σ = 4, n=16 б) $\bar{x}$= 16,8, σ =54, n=25

2. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной

средней равна 0,2, если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности σ =1,5 .

Контрольные вопросы:

1. Какой интервал называется доверительным?
2.Точечной оценкой называется?
3. Интервальной оценкой называется?
4. Надежностью называется?

Практическая работа №12
Тема «Моделирование случайных величин»

Цель научиться разыгрывать дискретную случайную величину которая принимает значения образующие противоположные события и полную группу событий.

1. Разыграть 8 значений случайной дискретной величины *X,* закон распределения которой задан в виде таблицы

X	3	11	24
p	0,25	0,16	0,59

2. Разыграть 6 испытаний, в каждом из которых событие *A* появляется с вероятностью p = 0,35.

3. **С**обытия A_1; A_2; A_3; A_4 образуют полную группу. Вероятности их наступления соответственно равны 0,19; 0,21; 0.34; 0,26. Разыграть 5 испытаний, в каждом из которых появляется одно из четырех заданных событий.

Контрольные вопросы:

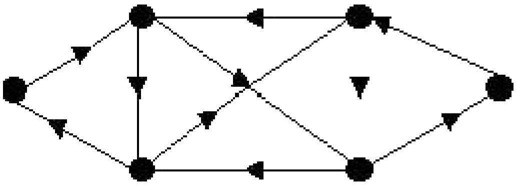
1.Сущность метода Монте-Карло моделирования случайных величин?
2. Случайными числами называют?
3. В каком интервале распределяют непрерывную случайную величину?
4. Как разбивают интервал на частичные интервалы?

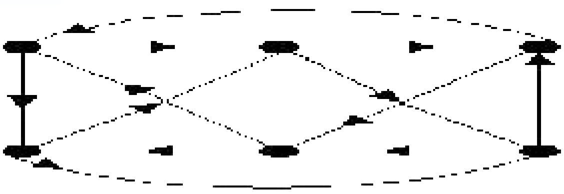
Практическая работа №13

Тема «Проверка графа на : двудольность, изоморфность, гамильтоновость, эйлеровость, связность, плоскость».

Цель научиться определять граф на двудольность, изоморфность, гамильтоновость, эйлерововсть, связность, плоскость.

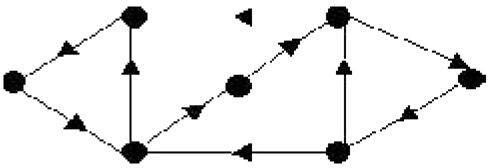
1.Будут ли следующие графы эйлеровыми



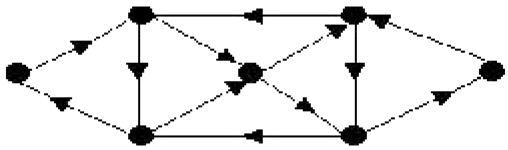


2. Будут графы гамильтоновыми:

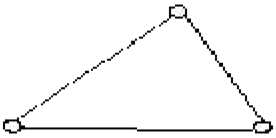
а)

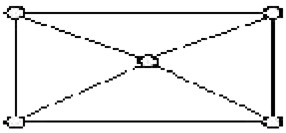


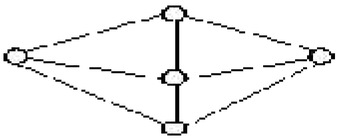
б)



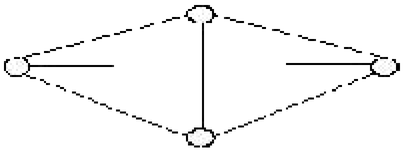
3. Будут ли данные графы, изоморфны:



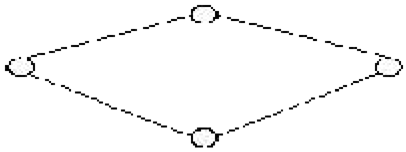




4. Связны ли данные графы

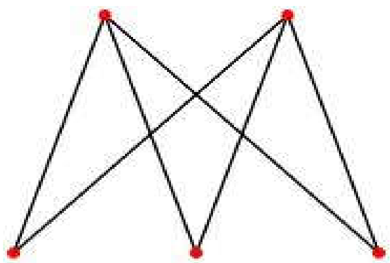


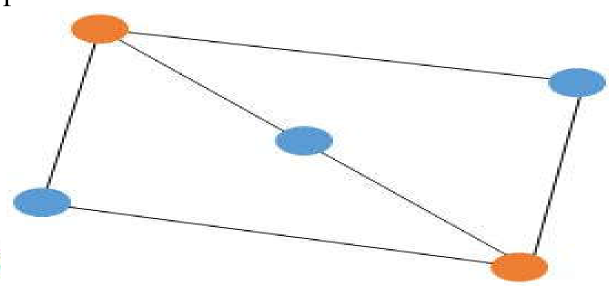
а)



б)

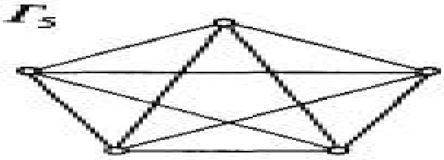
5. Двудольны ли данные графы



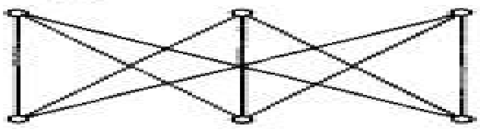


6. Плоские ли данные графы

Γ_5



$\Gamma_{3,3}$



Контрольные вопросы:

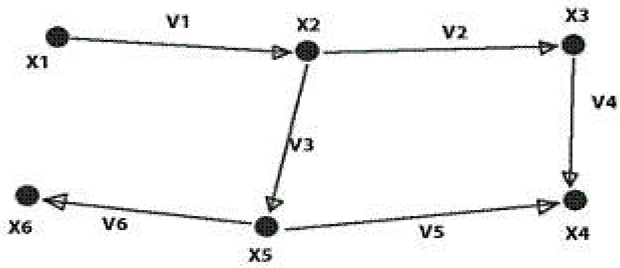
1. Какой граф называется двудольным?
2. Какой граф называется изоморфным?
3. Какой граф называется гамильтоновым?
4. Какой граф называется эйлеровым?
5. Какой граф называется связным?
6. Какой граф называется плоским?

Практическая работа №14

Тема «Проверка графа на степень связность».

Цель научиться проверять граф на степень связности.

Дано



Задание .
Определить является ли данный граф:
- Планарный или плоский (обосновать ответ);
- Двудольным графом (обосновать ответ и, если необходимо то достроить до двудольного).

Контрольные вопросы:

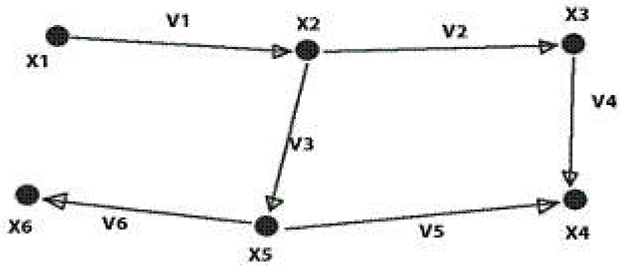
1.Графом называется?
2. Какой граф называется плоским?
3. Какой граф нызывается двудольным

Практическая работа №15

Тема «Построение графов».

Цель научиться строить графы.

Дано



Задание 1.
Задать граф следующими способами: перечислением, матрицами смежности и инцидентности.
Задание 2.
Определить следующие основные характеристики графа:
- число ребер и дуг,
- число вершин.

Контрольные вопросы:

1.Как строится матрица смежности?
2. Как строится матрица инцидентности?