Министерство общего и профессионального образования Свердловской области

государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Свердловской области
«Ирбитский мотоциклетный техникум» (ГАПОУ СО «ИМТ»)

**ПРОГРАММА ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ СРЕДНЕГО ЗВЕНА
ПО СПЕЦИАЛЬНОСТЯМ**

09.02.04 Информационные системы (по отраслям**)**

КОМПЛЕКТ МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

КОМПЛЕКТ МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Разработчик: В.Л. Зыкова, преподаватель ГАПОУ СО «ИМТ»

Комплект методических указаний по выполнению практических работ по дисциплине ЕН. 01 Математика разработан в соответствии с рабочей программой.

Методическое обеспечение предназначено для проведения практических работ по дисциплине и содержит пояснительную записку, задания для проведения практических работ, теоретический материал, список литературы.

Пояснительная записка.

Цель настоящего пособия – оказать помощь студентам в подготовке и при выполнении практических работ, а также облегчить работу преподавателя по организации и проведению практических занятий. Пособие содержит описание всех предусмотренных программой практических работ.

Практические работы по дисциплине предназначены для закрепления и обобщения знаний, полученных по изучаемой теме или нескольким темам, связанным между собой.

Программой дисциплины ЕН. 01. Элементы высшей математики предусмотрено выполнение практических работ, направленных на формирование следующих общих компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ОК 10. Исполнять воинскую обязанность, в том числе с применением полученных профессиональных знаний (для юношей).

Техник должен обладать профессиональными компетенциями, соответствующими основным видам деятельности (далее ВД):

ВД.1. Эксплуатация и модификация информационных систем:

ПК 1.1. Собирать данные для анализа использования и функционирования информационной системы, участвовать в составлении отчетной документации, принимать участие в разработке проектной документации на модификацию информационной системы.

ПК 1.2. Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности.

ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы.

ВД. 2. Участие в разработке информационных систем:
ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений
В соответствии с требованиями ФГОС СПО специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям) в результате освоения учебной дисциплины ЕН. 01. Элементы высшей математики: *обучающийся должен* ***уметь:***
- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения.

обучающийся должен ***знать:***
- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Содержание практических работ позволяет освоить:

- практические приемы вычисления, а так же выполнение измерений и связанных с ними расчетов геометрических тел и поверхностей;
- практические навыки вычисления пределов функций;
- практические навыки вычисления производной функции и применение производной;
- практические навыки вычисления определенного и неопределенного интеграла, практическое применение интеграла;
- элементы теории вероятностей и математической статистике.

В содержании каждой практической работы даны краткие теоретические сведения или формулы, примеры решения задач, и задания для самостоятельного решения по вариантам.

Ход выполнения практической работы
Практические работы необходимо выполнять в рабочих тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. Выполнить самостоятельную работу
4. Сдать преподавателю тетрадь для проверки.

Критерии оценивания практических работ
Отметка «5» ставиться, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- выполнено 75-90% заданий;

- либо работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны;

- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являются специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставиться, если:

- выполнено 51-75% заданий;

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- выполнено менее 50% заданий;

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Практическая работа

Тема: Выполнение действий над матрицами

Вычисление матричных многочленов.

<u>Цель занятия:</u>

1) изучить понятия: матрица, освоить способы выполнения операций над матрицами, элементарные преобразования матриц,

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1

1. Даны матрицы A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислите линейную комбинацию A+2B.
2. Возвести матрицу А в квадрат.
3. Найдите произведение матриц А и В, и В на А, если A=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Найти C = A-3B.

3. Пользуясь, определением вычислите: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}, |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Пользуясь, «правилом *треугольника* в вычислите $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Вариант 2

1. Даны матрицы A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислите линейную комбинацию 2B-A.

2. Возвести матрицу А в квадрат.

2. Найдите произведение матриц В *и* А, и В на А, если А= $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, В= $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Найти С = А-3В.

: $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 15 \end{vmatrix}, |B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. вычислите: $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей, какие виды матриц вы знаете?

2. Какие операции можно выполнять над матрицами?

Литература

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.12-20.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс, 2009, стр.10-18.

Практическая работа

Тема: Вычисление определителей второго и третьего порядка.

Вычисление миноров и алгебраических дополнений.

Составление обратной матрицы

Цель занятия:

1)изучить понятия: минор матрицы, алгебраическое дополнение, обратная матрица;

2)научиться вычислять миноры и алгебраические дополнения матриц, находить матрицу обратную данной.

3) научиться вычислять определители второго и третьего порядка, используя определение определителя матрицы и «правило треугольника».

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1

1. Вычислить определитель матрицы по элементам 1 строки

А. 2 8 5
-4 1 3
8 -2 -6

Вычислить определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}$$

Вычислить определитель по правилу треугольника

$$\begin{vmatrix} 8 & -8 & -9 \\ -7 & 6 & 3 \\ -4 & 9 & -6 \end{vmatrix}$$

2 Найдите матрицу обратную данной, если: а) $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}8 & 7 & 3\\ 13 & 12 & 10\\ 11 & 10 & 7\end{pmatrix}$.

3. Для определителя $|A|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 7 & 0\\ 0 & 5 & 2\end{vmatrix}$ найдите: $a¿A_{12}, A_{31}$, б) M_{23}, M_{13}.

Вариант 2

1. Вычислить определитель матрицы по элементам 1 строки

А. 1 4 3
-8 2 -5
1 1 -1

Вычислить определитель второго порядка

$\begin{vmatrix}5 & 9\\ -3 & 7\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}6 & -5\\ 7 & -4\end{vmatrix}$

Вычислить определитель по правилу треугольника

$\begin{vmatrix}6 & -8 & 6\\ 2 & 4 & 7\\ -5 & -3 & 9\end{vmatrix}$

2. Найдите матрицу обратную данной, если: а) $A=\begin{pmatrix}-7 & 9\\ 3 & -4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$.

3. Для определителя $|A|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 7 & 0\\ 0 & 5 & 2\end{vmatrix}$ найдите: $a¿A_{22}$, $A_{32}; б¿M_{11}$, M_{21}.

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Что называется минором матрицы, алгебраическим дополнением матрицы, в чём их отличие?

2. Как можно вычислить минор матрицы, алгебраическое дополнение матрицы?

3. Какая матрица называется обратной данной?

4. Как можно найти обратную матрицу?

5. Какие существуют способы нахождения определителей второго и третьего порядка?

Литература

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.33-37.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс, 2009, стр.18-19.

Практическая работа

Тема: Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера и методом обратной матрицы.

Цель занятия:

1) изучить правило Крамера для решения систем линейных уравнений;

2) научиться решать системы линейных уравнений, используя изученное правило.

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1

1. Решите систему уравнений по методу Крамера $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 4x-5y=2 \end{cases}$

2. Дайте определение совместной системы линейных алгебраических уравнений.

3. Решите систему уравнений по методу Крамера и методом обратной матрицы $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ x-2y+3z=-3 \\ 7x+y-z=10 \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений по методу Крамера $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 4x+10y=6 \end{cases}$

2.Дайте определение несовместнойсистемылинейных алгебраических уравнений.

3.Решите систему уравнений по методу Крамера и методом обратной матрицы $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1.Что называется системой линейных алгебраических уравнений?

2. Какие бывают виды систем линейных уравнений?

3.В чём заключается сущность правила Крамера для решения систем уравнений?

4. Какие формулы позволяют решать систему уравнений методом Крамера?

Литература

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.37-52.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс, 2009, стр.22- 25.

Приложение.

Метод Крамера

При решении методом Крамера используем определители n-го порядка. Пусть задана система (1). Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то систему (3) можно решить по формуле Крамера, причем это решение единственное:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad \dots; \qquad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

где определитель Δx_i может быть получен из главного определителя путем замены i-го столбца на столбец из свободных членов.

Пример 1. $$\cdot\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+7x_2-x_3=8 \end{cases}$$

Составляем главный определитель, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

и три вспомогательных определителя:

$$\Delta\,x_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta\,x_2=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta\,x_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Delta\,x_1$ составлен из определителя Δ путем замены элементов первого столбца свободными членами системы уравнений. В определителях $\Delta\,x_2$ и $\Delta\,x_3$ соответственно второй и третий столбцы заменены свободными членами. Вычислим все четыре определителя.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}=5+12+21+10-21+6=33;$$

$$\Delta\,x_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}=20+48+7+40-84+2=33;$$

$$\Delta\,x_2=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}=-1+24+24-2-24+12=33;$$

$$\Delta\,x_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}=-40+4+84+40-7-48=33.$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находим по формулам

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_1=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1=\frac{33}{33}=1; \qquad x_2=\frac{33}{33}=1; \qquad x_3=\frac{33}{33}=1.$$

Ответ: $x_1=1;\quad x_2=1;\quad x_3=1.$

Пример2. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4) - (-1)(12+16) - 1(-6-12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) - (-1)(44+22) - 1(-22-44) = 180;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44+22) - 4(12+6) - 1(33-33) = 60;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44+22) - (-1)(33-33) + 4(-6-12) = 60.$$

По теореме Крамера $x_1 = \dfrac{|A|_1}{|A|} = \dfrac{180}{60} = 3$; $x_2 = \dfrac{|A|_2}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$; $x_3 = \dfrac{|A|_3}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$.

Ответ: $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Условия неопределенности и несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Если определитель системы $\Delta = 0$, то система является либо несовместной (когда $\Delta_{x_1} \neq 0$ и $\Delta_{x_2} \neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta_{x_1} = 0$ и $\Delta_{x_2} = 0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

Условия несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Условия неопределенности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Если один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система уравнений (1) не имеет решения (если $\Delta = 0$).

Если главный и все вспомогательные определители равны нулю, то система (1) имеет бесконечно много решений.

Если главный определитель отличен от нуля, то система уравнений (1) имеет единственное решение.

3. Метод Гаусса

Эффективным методом решения и исследования систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса.

Идея метода Гаусса состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, которая легко исследуется и решается.

Пример 3.

$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

В результате элементарных преобразований добиваются того, чтобы в последнем уравнении системы осталось одно неизвестное (z), во втором – 2 неизвестных (y и z) а в первом – 3 неизвестных (x, y, z). За ведущее уравнение берется то, в котором коэффициент при x равен 1. Если такого уравнения нет, то его легко получить, разделив любое из уравнений системы на коэффициент при x.

Ведущим уравнением данной системы будет последнее. Перепишем систему так:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ 5x + 3y - z = 7 \end{cases} \quad (2)$$

Умножаем первое уравнение на (-2) и складываем со вторым, чтобы избавиться от x во втором уравнении. Результат сложения записываем на месте второго уравнения. Далее первое уравнение умножаем на (-5) и складываем с третьим, чтобы избавиться от x в третьем уравнении. Результат записываем на месте третьего уравнения. Первое уравнение при этом переписываем без изменений. Получим:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \quad -7y - 16z = 2 \\ \quad -7y - 4z = 7 \end{cases} \quad (3)$$

Системы уравнений (2) и (3) эквиваленты, т. е. они обе несовместны, или же обе совместны и имеют одни и те же решения.

Умножаем второе уравнение системы (5) на (-1) и складываем с третьим, чтобы избавиться от y в третьем уравнении. Первое уравнение при этом не трогаем. Результат записываем на месте третьего уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \quad -7y - 16z = 2 \\ \qquad\quad 12z = 5 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения $z = \frac{5}{12}$. Подставляем это значение z во втрое уравнение системы и находим y:

$$-7y - 16 \cdot \frac{5}{12} = 2$$

$$y = -\frac{26}{11}.$$

В первое уравнение подставляем значения z и y, получаем

$$x + 2 \cdot \left(-\frac{26}{11}\right) + 3 \cdot \frac{5}{12} = 1$$

$$x = \frac{187}{84}.$$

Ответ: $x = \frac{187}{84}$; $y = -\frac{26}{11}$; $z = \frac{5}{12}$.

Рекомендуется сделать проверку.

3. Матричный способ

Систему можно решить и матричным способом.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{4}$$

Составим матрицу системы из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из неизвестных x_1, x_2, x_3 и свободных членов составим матрицы – столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (4) в матричной форме примет вид

$$A \cdot X = B. \tag{5}$$

Чтобы найти матрицу X, умножим (7) на A^{-1} слева.

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Пример 4.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу A^{-1}.

РЕШЕНИЕ.

1) Составляем и вычисляем определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-1+0+4+3-4-0=2.$$

Определитель вычислен по правилу треугольника.

2) Транспонируем матрицу. Получаем

$$A^{T}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

3) Вычисляем алгебраические дополнения

$$A_{11};\quad A_{12};\quad A_{13};\quad A_{21};\quad A_{22};\quad A_{23};\quad A_{31};\quad A_{32};\quad A_{33}.$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix};\qquad M_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-4=-5;$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(-5)=-5.$$

Вычисляем A_{12}. Вычеркиваем первую строку и второй столбец. Составляем определитель второго порядка из оставшихся элементов.

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix};\qquad M_{12}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2-6=-4.$$

Вычисляем $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-4)=4$.

Аналогично вычисляем все остальные алгебраические дополнения:

$$A_{13}=7;\quad A_{21}=2;\quad A_{22}=-2;\quad A_{23}=-2;\quad A_{31}=1;\quad A_{32}=0;\quad A_{33}=-1.$$

Составим обратную матрицу

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 4 & 7\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-5/2 & 2 & 7/2\\ 1 & -1 & -1\\ 1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}$$

Сделаем проверку

$$\mathrm{E}=A^{-1}\cdot A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 4 & 7\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Пример 5.

Решить систему матричным способом

$$\begin{cases}5x+3y-z=7\\ 2x-3y+2z=9\\ x+2y+3z=1\end{cases}.$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу A:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Из неизвестных составим матрицу – столбец:

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Из свободных членов составим матрицу – столбец:

$$B=\begin{pmatrix}7\\ 9\\ 1\end{pmatrix}.$$

Тогда система запишется в виде

$$A\cdot X=B.$$

Получили матричное уравнение. Умножаем обе части этого уравнения на A^{-1} слева. Получаем:

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

Находим обратную матрицу:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=84; \qquad A^{T}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix};$$

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}13 & 11 & -3\\ 4 & -16 & 12\\ -7 & 7 & 21\end{pmatrix}$$ (матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов; $$A^{-1}=\frac{1}{84}\cdot\begin{pmatrix}13 & 11 & -3\\ 4 & -16 & 12\\ -7 & 7 & 21\end{pmatrix}$$ (обратная матрица).

Умножая обратную матрицу на B, получаем матрицу X .

$$X = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 187/84 \\ -26/21 \\ 5/12 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем ответ:

$$x = \frac{187}{84}; \qquad y = -\frac{26}{21}; \qquad z = \frac{5}{12}.$$

Сравните решение этой системы с решением метода Гаусса.

Практическая работа

Тема: Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель занятия:

1) изучить метод Гаусса для решения систем линейных уравнений;

2) научиться решать системы линейных алгебраических уравнений, используя изученным методом.

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1

1.Решите систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 5x-5y+4z=-3 \\ x-y-5z=11 \\ 4x-3y-6z=-9 \end{cases}$.

2.Сформулируйте определение определённой системы линейных уравнений. Приведите пример.

3.Решите систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+2z=5 \\ 3x+4y+4z=11 \end{cases}$.

Вариант 2

1.Решите систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 3x-5y-6z=-21 \\ 3x+y+z=-4 \end{cases}$.

2.Сформулируйте определение неопределённой системы линейных уравнений.Приведите пример.

3.Решите систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+2z=5 \\ 3x+4y+4z=12 \end{cases}$

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?

2. Какие бывают виды систем линейных уравнений?

3. Дайте определение общего решения системы линейных уравнений.

4. Дайте определение частного решения системы линейных уравнений.

5. В чём заключается сущность метода Гаусса для решения систем уравнений?

6. В каком случае система линейных уравнений будет иметь одно решение, бесконечно много решений, не иметь решений?

Литература

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.37-52.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс, 2009, стр.26-28.

Практическая работа

Тема: Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, использование свойств пределов.

Цель занятия:

1)изучить различные виды неопределённостей;

2)научиться раскрывать неопределённости и вычислять значения пределов функций

3)расширить представления о замечательных пределах функций, познакомиться с основными свойствами пределов;

4)научиться вычислять пределы функций, используя свойства пределов и замечательные пределы.

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1

Вычислите пределы функций

1. $\lim\limits_{x \to 3}\left(5x^2-6x+7\right)$
2. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{tg\,3x}{tg\,4x}$

x – 2 x^3 - 1

lim -------- lim -----------

x → 2 √ x + 2 x → 1 x - 1

4.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{a^x - 1}$

6 $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$

7 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 - 2}$

8 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 8}{2x^3 - x + 1}$

9 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x + 5}{3x^3 + 1}$

Вариант 2

Вычислите пределы функций

1. $\lim\limits_{x \to 2} \left(2x^2 - 3x + 7\right)$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, 8x}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x - 2} - 2}{x - 2} \qquad \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

4.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{arctg x}$

6 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 7x + 6}$

7 $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}$

8 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x + 5}{3x^3 + 1}$

9 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 + x - 1}{2x^4 + x^2}$

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Что называют пределом функции в точке?

2. Что называют пределом функции при x стремящемся к ∞?

3. Какие существуют свойства пределов функций? Какие из них вы использовали при выполнении данных заданий?

4. I и II замечательные пределы.

5 . Что называют неопределённостью при вычислении пределов функций?

6 . Какие виды неопределённостей существуют?

7 . Как раскрыть неопределённость вида $\frac{0}{0}$? $\frac{\infty}{\infty}$? ∞-∞?

8 Какие из замечательных пределов использовали при выполнении данных заданий?

Литература

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.97-104.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009, стр.112-125
3. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.97-104.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс, 2009, стр.112-124.

Практическая работа

Тема: Исследование функции на непрерывность в точке, в интервале, на отрезке..

Цель занятия:

1)изучить план исследования функции;

2) научиться исследовать данную функцию и выполнять построение её графика.

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

.

Задания для практической работы

Вариант 1

1. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{x}{2}-x^4$ на максимум и минимум.

2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=2x^3-3x^2+5$ и постройте ее график.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^4-8x^2-9$ на отрезке $[0;3]$.

Вариант 2

1. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-3x$ на максимум и минимум.

2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+1{,}5x^2$ и постройте ее график.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=-x^4+2x^2+3$ на отрезке $[0;4]$

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте план исследования данной функции.

2.Какая точка называется точкой максимума функции?

3. Сформулируйте правило исследования функции на экстремумы с помощью второй производной.

4.Какая кривая называется выпуклой в точке?

5.Сформулируйте правило нахождения интервалов вогнутости, выпуклости графика функции.

6.Какая прямая называется асимптотой?

7.Какая прямая называется вертикальной асимптотой?.

Литература

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.146-148.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс, 2009, стр.180-181.

Практическая работа

Тема Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла.

Вычисление объёмов тел вращения с помощью определённого интеграла

Цель занятия:

1) рассмотреть приложения определённого интеграла к различным геометрическим задачам;

2) научиться вычислять площадь плоской фигуры и объём тела вращения.

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$, если $1 \le x \le e$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$ и $x = 2$.

3. Вычислите объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции $0 \le y \le \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

4 Вычислить объем тела, полученного вращением плоской фигуры вокруг одной из осей координат (сделать чертеж).

$y = x^3 - 4x$, ось OX.

Вариант 2

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$ и $y = x^2$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 9$ и $y = 0$.

3. Вычислите объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2$

4 Вычислить объем тела, полученного вращением плоской фигуры вокруг одной из осей координат (сделать чертеж).

$y = \frac{x^2}{4}$; $y = 1$, $y = 5$, ось OY вокруг оси ОУ.

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Перечислите приложения определённого интеграла к различным геометрическим задачам.

2. Как с помощью определённого интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$?

3.Как с помощью определённого интеграла вычислить объём тела вращения?

Литература

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.169-173.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс, 2009, стр.237-250.

3. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с

Практическая работа

Тема: **Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными**

Цель работы: приобрести навыки решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1

1. Найти общие решения уравнений:

а) $(y-1)^2 dx + (1-x)^3 dy = 0$;

б) $x^2\,dx = 3\,y^2\,dy$.

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям: $y\,dy = x\,dx\,;\ y = 4\ при\ x = -2$.

Вариант 2

1. Найти общие решения уравнений:

а) $y\,dx + (1+x^2)\ln y\,dy = 0$;

б) $\sqrt{x}\,dy = \sqrt{y}\,dx$.

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям: $x\,dy = y\,dx\,;\ y = 6\ при\ x = 2$.

,***Пояснения к работе***

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1 Понятие дифференциального уравнения?
2. Какое дифференциальное уравнение называют с разделяющими переменными?
3. От чего зависит порядок дифференциального уравнения?
Дать понятие дифференциального уравнения 1-го порядка?
4. Понятие дифференциального уравнения n-го порядка?
5 Понятие общего решения дифференциального уравнения n-го порядка.
6 Понятие частного решение дифференциального уравнения?
7 Алгоритм решения дифференциального уравнения?

Литература

1.Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с

2. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352

3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с

Приложение:

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение *a* является производной по времени *t* от скорости *V*, которая также является производной по времени *t* от перемещения *S*. Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt};\quad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t)t^2}{2}$ - уравнение связывает функцию f(t) с независимой переменной t и производной второго порядка функции f(t).

Определение. **Дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Определение. **Общим решением** дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция y = φ(x, C_0).

Определение. Решение вида y = φ(x, C_0) называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида y = φ(x, C_0), удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при $x = x_0$ значение φ(x_0) = y_0, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

<u>Определение.</u> Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

<u>Пример.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \dfrac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

<u>Определение.</u> Интегральной кривой называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

<u>Дифференциальные уравнения первого порядка.</u>

<u>Определение.</u> Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Пример. Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$$y^{-2/3}dy = dx$$

$$\int y^{-2/3}dy = \int dx$$

$$3y^{1/3} = x + C$$

$$27y = (x + C)^3$$ - общий интеграл

$$y = \frac{1}{27}(x + C)^3$$ - общее решение

Пример. Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^{y} = 0$ при условии y(1) = 0.

$$\frac{ydy}{dx} + xe^{y} = 0$$

$$y\,dy + xe^{y}dx = 0; \quad \frac{y}{e^{y}}dy = -x\,dx$$

$$\int \frac{y}{e^{y}}dy = -\int x\,dx$$

[illegible]

$$e^{-y}(y+1) = \frac{x^2}{2} + C_0$$

$$2e^{-y}(y+1) = x^2 + C$$

Если y(1) = 0, то [illegible]

Итак, частный интеграл: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

Практическая работа

Тема: Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Цель: приобрести навыки решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1

1. Найти общее решение уравнения:

[illegible]

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$$xy' + y = \frac{x^2 + y^2}{x}; y = 0 \text{ при } x = 1.$$

Вариант 2

1. Найти общее решение уравнения:

[illegible]

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$$(x^2 - y^2)dx + xydy = 0; y = 2 \text{ при } x = 1.$$

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Понятие дифференциального уравнения?
2. Какое дифференциальное уравнение называют с разделяющими переменными?
3. От чего зависит порядок дифференциального уравнения?
4. Что называют частным решением дифференциального уравнением?
5. Что называют задачей Коши?
6 Дайте определение однородного дифференциального уравнения первого порядка?
7 Решение однородного дифференциального уравнения?
8. Понятие дифференциального уравнения n-го порядка?

Литература

1.Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с
2. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352
3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с

Приложение:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

$x^3y'+8y-x+5=0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x,y,y')=0$.

$x\frac{d^2y}{dx^2}+xy\frac{dy}{dx}+x^2=y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x,y,y',y'')=0$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная C – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение. Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. **Интегралом** дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \dfrac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2=\frac{C}{1};\quad C=2$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y=\frac{2}{x}$$

<u>Определение.</u> Интегральной кривой называется график y = φ(x) решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

<u>Дифференциальные уравнения первого порядка.</u>

<u>Определение.</u> Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x,y,y')=0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y'=f(x,y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y);\quad dy=f(x,y)dx;\quad f(x,y)dx-dy=0;$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'=y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx}=y^{2/3}$$

$$y^{-2/3}dy=dx$$

$$\int y^{-2/3}dy=\int dx$$

$$3y^{1/3}=x+C$$

$$27y=(x+C)^3 \text{ - общий интеграл}$$

$$y=\frac{1}{27}(x+C)^3 \text{ - общее решение}$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $\frac{yy'}{x}+e^y=0$ при условии y(1) = 0.

$$\frac{ydy}{dx}+xe^y=0$$

$$ydy=-xe^ydx;\quad \frac{y}{e^y}dy=-xdx;$$

$$\int\frac{y}{e^y}dy=-\int xdx$$

$$\int ye^{-y}dy=\left\{\begin{matrix} u=y; & e^{-y}dy=dv; \\ du=dy; & v=-e^{-y}\end{matrix}\right\}=-e^{-y}y-\int -e^{-y}dy=-e^{-y}y-e^{-y}=-e^{-y}(y+1);$$

$$e^{-y}(y+1)=\frac{x^2}{2}+C_0;$$

$$2e^{-y}(y+1)=x^2+C$$

Если y(1) = 0, то $2e^{0}(0+1)=1+C;\ 2=1+C;\ C=1$

Итак, частный интеграл: $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка –это уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Для того, чтобы распознать однородное дифференциальное уравнение, нужно ввести постоянную t и сделать замену y → ty, x → tx. Если, в результате такого преобразования, постоянная t сократится, то это **однородное дифференциальное уравнение**. Производная y′ при таком преобразовании не меняется:

$$y'=\frac{dy}{dx}\to\frac{dty}{dtx}=\frac{tdy}{tdx}=\frac{dy}{dx}$$

Пример

$$ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$$

Делаем замену y → ty, x → tx:

$$tyd\left(tx\right)+\left(2\sqrt{txty}-tx\right)d\left(ty\right)=t^2ydx+\left(2\sqrt{t^2xy}-tx\right)tdy=$$

$$t^2ydx+t\left(2t\sqrt{xy}-tx\right)dy=t^2ydx+t^2\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$$

, или

$$t^2ydx+t^2\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$$

. Сокращаем на t^2:

$$ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$$

Уравнение не содержит t - значит это однородное уравнение.

Решение однородного дифференциального уравнения

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки:

y = zx,

где z - функция от x. Действительно,

y′ = (zx)′ = z′x + z(x)′ = z′x + z

Подставляем в исходное уравнение:

$$y'=z'x+z=f\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(\frac{zx}{x}\right)=f\left(z\right)$$

, или

$$xz'+z=f\left(z\right)$$

, или

$$x\frac{dz}{dx}=f\left(z\right)-z$$

Разделяем переменные. Умножим на dx и разделим на x(f(z) - z). При f(z) - z ≠ 0 и x ≠ 0 получаем:

$$\frac{dz}{f\left(z\right)-z}=\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dz}{f\left(z\right)-z}=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

И мы получили общий интеграл уравнения:

$$\int\frac{dz}{f\left(z\right)-z}=\ln|x|+C$$

Постоянную интегрирования C часто бывает удобно записать в виде lnC, тогда

$$\ln|x|+lnC=\ln\left(Cx\right)$$

Знак модуля можно опустить, поскольку нужный знак определяется выбором знака постоянной C. Тогда общий интеграл примет вид:

$$\int\frac{dz}{f\left(z\right)-z}=\ln\left(Cx\right)$$

Далее следует рассмотреть корни уравнения: f(z) - z = 0 и решение x = 0 (если есть смысл).

Пример решения однородного дифференциального уравнения первого порядка

Решить уравнение:

$$xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$$

Решение.

Проверим, является ли данное уравнение однородным. Делаем замену: y → ty, x → tx. При этом y′ → y′.

$$xy'=y+\sqrt{y^2-x^2} \quad\rightarrow\quad txy'=ty+\sqrt{\left(ty\right)^2-\left(tx\right)^2}$$, или

$$txy'=ty+\sqrt{t^2\left(y^2-x^2\right)}$$, или

$$txy'=ty+t\sqrt{y^2-x^2}$$. Сокращаем на t:

$$xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$$

Постоянная t полностью сократилась. Поэтому уравнение является однородным.

Делаем замену: y = zx.

y′ = (zx)′ = z′x + z(x)′ = z′x + z

Подставляем в исходное уравнение:

$$x\left(z'x+z\right)=zx+\sqrt{\left(zx\right)^2-x^2}$$
, сокращаем на x:

$$z'x+z=z+\sqrt{z^2-1}$$
, или

$$x\frac{dz}{dx}=\sqrt{z^2-1}$$

Умножим на dx и разделим на $x\sqrt{z^2-1}$. При z^2 - 1 ≠ 0 уравнение принимает вид:

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+\ln C \qquad (1)$$

Оставшийся интеграл табличный:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|$$
Получаем:

$$\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|=\ln|x|+\ln C$$

Потенцируем:

$$z+\sqrt{z^2-1}=Cx$$

Заменим $z=\frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}=Cx$$
. Умножим на x:

$$y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$$
, или

$$\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2-y$$
. Возводим в квадрат:

$$y^2-x^2=\left(Cx^2-y\right)^2=\left(Cx^2\right)^2-2Cx^2y+y^2$$
, или

$$y^2-x^2=C^2x^4-2Cx^2y+y^2$$
, или

$$2Cx^2y=C^2x^4+x^2$$
. Разделим на x:

$$2Cy=C^2x^2+1 \qquad (2)$$

Теперь рассмотрим случай, когда z^2 – 1 = 0, или

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = 0$$

Корни этого уравнения:
y = x и y = – x
являются решениями исходного уравнения и не входят в решение (2). Поэтому к общему интегралу (2) добавим решения y = x и y = – x.

Ответ:

$$2Cy = C^2x^2 + 1; \quad y = x; \quad y = -x$$

Практическая работа

Тема: Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы: приобрести навыки решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1

1. Найти общее решение уравнения:

$$y' + \frac{y}{x} = 4$$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:
$y' + 2y = 4x; y = 3$ при $x = 0$.

Вариант 2

1. Найти общее решение уравнения:

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{1}{x}$$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:
$\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = e^x x^3$; $y = e$ *при* $x = 1$.

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Что называют частным решением дифференциального уравнением?
2. Какое уравнение называется линейных дифференциальных уравнений первого порядка?
3. Какое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением?
4.Какое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением?
5. Методы решение ЛДУ?

Литература

1.Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с
2. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352
3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с

Приложение:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=C$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция y = φ(x, C_0).

Определение. Решение вида y = φ(x, C_0) называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида y = φ(x, C_0), удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. **Интегралом** дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \frac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$2 = \frac{C}{1};\quad C = 2;$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

<u>Определение.</u> Интегральной кривой называется график y = φ(x) решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

<u>Дифференциальные уравнения первого порядка.</u>

<u>Определение.</u> Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y);\quad dy - f(x, y)dx = 0;\quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0;$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$$y^{-2/3}dy = dx$$

$$\int y^{-2/3}dy = \int dx$$

$$3y^{1/3} = x + C$$

$27y = (x + C)^3$ - общий интеграл

$y = \frac{1}{27}(x + C)^3$ - общее решение

<u>Пример.</u> Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при условии y(1) = 0.

$$\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0$$

$$ydy + xe^y dx = 0;\quad \frac{y}{e^y}dy = -xdx;$$

$$\int \frac{y}{e^y}dy = -\int xdx$$

[illegible]

$$e^y(y+1)=\frac{x^2}{2}+C_0;$$
$$2e^y(y+1)=x^2+C$$

Если y(1) = 0, то [illegible]

Итак, частный интеграл: $2e^y(y+1)=x^2+1$.

Уравнение вида:
y'+p(x)y=q(x) (*)

где p(x) и q(x) — непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Название уравнения объясняется тем, что неизвестная функция у и ее производная у' входят в уравнение линейно, т. е. в первой степени.

Если q(x) = 0, то уравнение (*) называется линейным однородным уравнением. Если q(x)≠0, то уравнение (*) называется линейным неоднородным уравнением. Для нахождения общего решения уравнения (10) может быть применен метод вариации постоянной. В этом методе сначала находят общее решение линейного однородного уравнения:

$y'+p(x)y=0$ (**)

соответствующего данному неоднородному уравнению (*). Уравнение (**) является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$\frac{dy}{y}=-p(x)dx \Rightarrow \ln|y|=-\int p(x)dx+\ln|C_1|$

Отсюда, потенцируя, находим общее решение данного уравнения:

$y=\pm C_1e^{-\int p(x)dx}$, или $y=Ce^{-\int p(x)dx}$ (***)

где $C=\pm C_1$ — произвольная постоянная.

Теперь найдем общее решение уравнения (*) в виде (***), где С будем считать не постоянной, а новой неизвестной функцией от x (в этом смысл метода!), т. е. в виде

$y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$

Чтобы найти функцию C(x) подставим решение в виде в уравнение (*). Получим:

$C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$

Или $C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$

Итак, чтобы функция являлась решением уравнения (*), функция C(x) должна удовлетворять уравнению $C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$.

Интегрируя его, находим:

$C(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1$

где C_1 — произвольная постоянная. Подставляя найденное выражение для С (х) в соотношение (10), получаем общее решение линейного уравнения (10):

$y(x)=C_1e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'+3y=e^{2x}$.

Данное уравнение является линейным. Здесь $p(x)=3$, $q(x)=e^{2x}$. Решаем сначала соответствующее однородное уравнение $y'+3y=0$. Разделяя переменные $\frac{dy}{y}=-3dx$ и интегрируя, находим $\ln|y|=-3x+\ln|C_1|$ или $y=\pm C_1e^{-3x}=Ce^{-3x}$. Ищем общее решение данного уравнения в виде $y=C(x)e^{-3x}$. Дифференцируя, имеем $y'=C'(x)e^{-3x}-3C(x)e^{-3x}$. Подставляя в данное уравнение выражения для у и у', получаем $C'(x)e^{-3x}=e^{2x}$, $C'(x)=e^{5x}$ или $dC=e^{5x}dx$,откуда $C(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+C_2$, где C_2 - произвольная постоянная. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид:

$y=C(x)e^{-3x}=(\frac{1}{5}e^{5x}+C_2)e^{-3x}$ или $y=\frac{1}{5}e^{2x}+C_2e^{-3x}$

Метод И. Бернулли

Суть заключается в следующем. Решение уравнения (10) ищется в виде произведения двух других функций, т.е. с помощью постановки (подстановка Бернулли):

$y=u(x)+v(x)$

где $u(x)$, $v(x)$ - неизвестные функции от х, причем одна из них произвольна. Тогда $y'=u'v+uv'$ Подставляя выражения для у и у' в уравнение (10), получаем:

$u'v+uv'+p(x)uv=q(x)$ или $u'v+u(v'+p(x)v)=q(x)$ (15)

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы сумма в скобках обратилась в нуль, т.е. $v'+p(x)v=0$. Итак, $\frac{dv}{dx}+p(x)v=0$, т.е. $\frac{dv}{v}=-p(x)dx$. Интегрируя, получаем: $\ln|v|=-\int p(x)dx+\ln|c|$. Ввиду свободы выбора функции $v(x)$, можно принять $c=1$. Отсюда $v=e^{-\int p(x)dx}$. Подставляя найденную функцию v в уравнение (10), получаем $u'e^{-\int p(x)dx}=q(x)$. Получено уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его: $u=\int q(x)e^{\int p(x)dx}$. Возвращаясь к переменной у, получаем решение исходного дифференциальное уравнения.

$y=u\bullet v=(\int q(x)\bullet e^{\int p(x)dx}dx+c)\bullet e^{-\int p(x)dx}$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'+3y=e^{2x.}$

Делаем замену переменных $y=u\bullet v$; $y'=u'v+uv'$, где $u=u(x)$ - произвольная функция, $v=v(x)$ - функция, определяемая так, чтобы $y=u\bullet v$ было решением уравнения $u'v+uv'+3u\bullet v=e^{2x}$. Группируем члены полученного уравнения: $u'v+u(v'+3v)=e^{2x}$. Приравниваем множитель второго слагаемого, стоящий в скобках к нулю $v'+3v=0$; $\Rightarrow \frac{dv}{dx}$

+3v=0.
Решив данное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, имеем

$\frac{dv}{dx}$=-3v ⇒ $1=\left(1-\frac{y}{x}\right)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)$, $\Rightarrow x=(x-y)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)$ =-3dx ⇒ $\int\frac{dv}{dx}$=3∫dx ⇒ ln|v|=-3x ⇒ $v=e^{-3x}$

Подставляя найденную функцию $v=e^{-3x}$ в уравнение $u'v+u(v'+3v)=e^{2x}$, найдем u

$u'\bullet e^{-3x}=e^{2x} \Rightarrow u'=e^{5x} \Rightarrow \frac{du}{dx}=e^{5x} \Rightarrow \int du=\int e^{5x}dx \Rightarrow u=\frac{1}{5}e^{5x}+c$

Подставляя u и v в y=u•v находим решение заданного уравнения:

$y=(\frac{1}{5}e^{5x}+c)\bullet e^{-3x}$ или $y=\frac{1}{5}e^{2x}+ce^{-3x}$

Практическая работа

Тема: Решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Цель работы: приобрести навыки решения дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1.	Вариант 2.
1. Найти общие решения уравнений: а) $y''-y'=x^2+\sin x$ б) $y''+y'=5x+2e^x$	1. Найти общие решения уравнений: а) $y''+5y'+6y=\cos x+x$ б) $y''-6y'+9y=x^2+1-e^{3x}$

,Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Что называют частным решением дифференциального уравнением?
2. Какое уравнение называется линейных дифференциальных уравнений второго порядка?
3. По каким формулам находятся корни ЛДУ 2-го порядка?
.4. От чего зависит порядок дифференциального уравнения?
5. Алгоритм решения дифференциального уравнения.

Литература

1.Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с
2. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352
3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с

Приложение:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y,которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $y''+\rho y'+qy=f(x)$, где ρ и q – вещественные числа, $f(x)$ – непрерывная функция, называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка вида:

$$y''+\rho y'+qy=0, \tag{1}$$

у которого правая часть $f(x)$ равна нулю. Такое уравнение называется однородным.

Уравнение

$$K^2+\rho K+q=0 \qquad (2)$$

называется характеристическим уравнением данного уравнения (1).

Характеристическое уравнение (2) является квадратным уравнением, имеющим два корня. Обозначим их через K_1 и K_2.

Общее решение уравнения (1) может быть записано в зависимости от величины дискриминанта $D=\rho^2-4q$ уравнения (2) следующим образом:

1. При $D>0$ корни характеристического уравнения вещественные и различные ($K_1 \neq K_2$), и общее решение имеет вид $y = C_1 e^{K_1 x} + C_2 e^{K_2 x}$.

2. При $D=0$ корни характеристического уравнения вещественные и равные ($K_1=K_2=K$), и общее решение имеет вид: $y = e^{Kx}(C_1 + C_2 x)$.

Пример 1. Найти общее уравнение $y''-y'-2y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $K^2-K-2=0$, его корни $K_1=1$, $K_2=-2$ вещественные и различные. Общее решение уравнения имеет вид $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $K^2-2K+1=0$, его корни $K_1 = K_2=1$ – вещественные и равные. Общее решение уравнения имеет вид $y=e^x(C_1+C_2x)$.

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение второго порядка:

$$y''+\rho x+qy=f(x), \qquad (3)$$

где $f(x)$ – непрерывная функция, отличная от нуля.

Общее решение такого уравнения представляет собой сумму частного решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения (3) и общего решения y_oсоответствующего однородного уравнения (1):

$$y = y_o + \tilde{y}$$

Поскольку нахождение общего решения однородного уравнения мы уже рассмотрели, то остаются рассмотреть вопрос о нахождении частного решения. Рассмотрим различные виды правых частей уравнения (3).

1) Пусть правая часть имеет вид $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n. Тогда частное решение $\tilde{y}$ ищем в виде $\tilde{y} = Q_n(x)x^r e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а r – число, показывающее, сколько раз α является корнем характеристического уравнения.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y=x^2+1$.

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y_o=e^x(C_1+C_2x\ )$(см. пример 2). Так как правая часть уравнения является многочленом второй степени и ни один из корней характеристического уравнения $x^2-2x+1=0$ не равен нулю ($K_1=K_2=1$), то частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$, где A, B, C – неизвестные коэффициенты. Дифференцируя дважды $\tilde{y}=Ax^2+Bx+C$ и подставляя $\tilde{y}=Ax^2+Bx+C$, $\tilde{y}'= 2Ax + B$, $\tilde{y}''= 2A$ в данное уравнение находим $2A-4Ax-2B+Ax^2+Bx+C=x^2+1$, или $Ax^2+(B-4A)x+2A-2B+C=x^2+1$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, имеем $A=1$, B-$4A=0$, $2A$-$2B+C=1$, Находим $A=1$, $B=4$, $C=7$. Итак, частное решение данного уравнения имеет вид $\tilde{y} = x^2 + 4x + 7$, а общее решение - $y = e^x(C_1 + C_2x) + x^2 + 4x + 7$.

Практическая работа

Тема: Нахождение неопределенного интеграла по частям

Цель работы: приобрести навыки нахождения неопределенного интеграла методом по частям.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1
Найдите следующие интегралы.

1. $\int (7-2x)^3 dx$;   2. $\int \sqrt{(3x+1)}dx$;

3. $\int \sqrt{(4x^3+10x)}dx$;   4. $\int \sqrt{\cos x}dx$.

Вариант 2
Найдите следующие интегралы.

1. $\int (2-5x)^4 dx$;   2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-5)^2}}$;

3. $\int \sqrt{(x^2-1)^3}dx$;   4. $\int \sqrt{(e^x+1)}dx$.

,Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Основные свойства неопределенного интеграла?
2 Какие методы интегрирования вы знаете?
3 В чем заключается метод интегрирование по частям?
4. В чем заключается метод подстановки?
5Что называется первообразной?
6. Первообразная элементарных функций?
7. Что называется неопределенным интегралом?
8Таблица интегралов?

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с.- ISBN 978-5-9134-460-3
2. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352 с.-ISBN 978-5-91134-271-5, ISBN 978-5-16-002152-2
.3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил. -ISBN 978-5-8114-1413-0

Приложение: Отыскание функции F(x) по известному дифференциалу dF(x)=f(x)dx (или по известной ее производной F'(x)=f(x)) т.е. действие обратное дифференцированию, называются ***интегрированием***, а искомая функция F(x) называется **первообразной** функцией от функции f(x).

Определение: Совокупность всех первообразных F(x)+C от функции f(x) называется неопределенным интегралом от этой функции:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Основные формулы интегрирования.

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

4. $\int \sin u du = -\cos u + C$

5. $\int \cos u du = \sin u + C$

6. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$

7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

8. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$

9. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец, определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos xdt$.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2+1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \dfrac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$(uv)' = u'v + v'u$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2\sin xdx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x\cdot 2xdx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x}\cos xdx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos xdx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x\cdot 2e^{2x}dx =$

$$= \begin{cases} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{cases} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x} dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Практическая работа

Тема: Вычисление определённого интеграла по формуле Ньютона - Лейбница

Цель работы: приобрести навыки вычисления определенного интеграла.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^1 xe^{-x}dx$; 2. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$;

3. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4dx}{9+16x^2}$;

4. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+10}$

Вариант 2

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$; 2. $\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{6}} \frac{dx}{1+2x^2}$;

3. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx;$

4. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dx}{x^3}.$

,***Пояснения к работе:*** Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1.Что называется неопределенным интегралом?
2. Что такое определенный интеграл?
3. Основные свойства определенного интеграла?
4. Как выглядит формула Ньютона-Лейбница?
5. Замена переменных в определенном интеграле?
6. Интегрирование по частям в определенном интеграле?
7. Таблица интегралов?
8. Что называют первообразной функции?

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с.- ISBN 978-5-9134-460-3
2. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352 с.-ISBN 978-5-91134-271-5, ISBN 978-5-16-002152-2
.3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил. -ISBN 978-5-8114-1413-

Приложение:

Определенный интеграл-это площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции y=f(x), прямыми x=a, x=b и самим отрезком [a;b].

Определенный интеграл-это приращение первообразной на отрезке [a;b].

Определенный интеграл- это предел интегральных сумм.

Основные правила и свойства определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(kx+l)dx = \frac{1}{k}\int_{ka+l}^{kb+l} f(t)dt$$

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Вычисление определенного интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и F(x) - одна из первообразных функции на этом отрезке, тогда справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Замена переменных в определенном интеграле.

Пусть функция y = f(x) определена и непрерывна на отрезке [a; b]. Множество [a; b] является областью значений некоторой функции x = g(z), которая определена на интервале $[\alpha; \beta]$ и имеет на нем непрерывную производную, причем $g(\alpha) = a$ и $g(\beta) = b$, тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(z)) \cdot g'(z)dz$.

Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Пусть на отрезке [a; b] определены и непрерывны функции u(x) и v(x) вместе со своими производными первого порядка и функция $v'(x) \cdot u(x)$ – интегрируема, тогда на этом

отрезке интегрируема функция $u'(x)\cdot v(x)$ и справедливо равенство
$$\int_a^b v'(x)\cdot u(x)dx = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx$$.

<u>Пример 1</u>

Вычислить определенный интеграл
$$\int_1^2 2x^2dx$$

Решение:
$$\int_1^2 2x^2dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3-1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

<u>Пример 2</u>

Вычислить определенный интеграл
$$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$$

Решение:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = \arccos 2x \Rightarrow du = -\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$(*) = (x \arccos 2x)\Big|_{-1/2}^{1/2} + 2\int_{-1/2}^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} = \left(\frac{1}{2}\arccos 1 + \frac{1}{2}\arccos(-1)\right) - \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= \frac{0}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4x^2}\right)\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0-0) = \frac{\pi}{2}$$

Практическая работа

Тема: Нахождение неопределенного интеграла методом подстановки

Цель работы: приобрести навыки нахождения неопределенного интеграла методом подстановки.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1

Найдите следующие интегралы.

1. $\int (7-2x)^3 dx$; 2. $\int \sqrt{(3x+1)} dx$;

3. $\int x^2\sqrt{(4x^3+10x)}dx$; 4. $\int \sin x\sqrt{\cos x}dx$.

Вариант 2

Найдите следующие интегралы.

1. $\int (2-5x)^4\,dx$; 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-5)^2}}$;

3. $\int x\sqrt{(x^2-1)^3}dx$; 4. $\int e^x\sqrt{(e^x+1)}dx$.

,***Пояснения к работе***

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

.1.Что называется первообразной?
2. Первообразная элементарных функций?
3. Что называется неопределенным интегралом?
4 Таблица интегралов?
5 Основные свойства неопределенного интеграла?
6 Какие методы интегрирования вы знаете?
7 В чем заключается метод интегрирование по частям?
8. В чем заключается метод подстановки?

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с.-
2. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352 \
3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с

Приложение: Отыскание функции F(x) по известному дифференциалу dF(x)=f(x)dx (или по известной ее производной F'(x)=f(x)) т.е. действие обратное дифференцированию, называются ***интегрированием***, а искомая функция F(x) называется **первообразной** функцией от функции f(x).

Определение: Совокупность всех первообразных F(x)+C от функции f(x) называется неопределенным интегралом от этой функции:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Основные формулы интегрирования.

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C,$ n $\neq$ -1

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

4. $\int \sin u du = -\cos u + C$

5. $\int \cos u du = \sin u + C$

6. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$

7. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

8. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + C$

9. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C$

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

<u>Непосредственное интегрирование.</u>

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \dfrac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\dfrac{1}{x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец, определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = sinx$, $dt = cosxdt$.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

(uv)′ = u′v + v′u

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2\sin xdx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x\cdot 2xdx =$

$$=\begin{Bmatrix} u=x; & dv=\cos xdx; \\ du=dx; & v=\sin x \end{Bmatrix}=-x^2\cos x+2\left[x\sin x-\int\sin xdx\right]=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

<u>Пример.</u> $\int e^{2x}\cos xdx=\begin{Bmatrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\cos xdx; & v=\sin x \end{Bmatrix}=e^{2x}\sin x-\int\sin x\cdot 2e^{2x}dx=$

$$=\begin{Bmatrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\sin xdx; & v=-\cos x; \end{Bmatrix}=e^{2x}\sin x-2\left[-e^{2x}\cos x-\int -\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right]=e^{2x}\sin x+$$

$$+2e^{2x}\cos x-4\int\cos xe^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos xdx=e^{2x}(\sin x+2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos xdx=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Практическая работа

Тема: Нахождение неопределенного интеграла методом непосредственного интегрирования

Цель работы: приобрести навыки нахождения неопределенного интеграла методом непосредственного интегрирования.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1

Найдите следующие интегралы.

1. $\int(1-\sqrt{x})^2dx$; 2. $\int\sin^2 xdx$;

3. $\int \cos(7x+3)dx$;   4. $\int x^{-4}dx$.

Вариант 2

Найдите следующие интегралы.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$;   2. $\int (2x+3)^2 dx$;

3. $\int tgxdx$;   4. $\int \cos(x-2)dx$.

*,**Пояснения к работе***

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1.Что называется первообразной?
2. Первообразная элементарных функций?
3. Что называется неопределенным интегралом?
4. Таблица интегралов?
5. Основные свойства неопределенного интеграла?
6. Какие методы интегрирования вы знаете?
7. В чем заключается метод непосредственного интегрирования?
8. В чем заключается метод интегрирование по частям?

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с3
2. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352 с.-
3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил.

Приложение: Отыскание функции F(x) по известному дифференциалу dF(x)=f(x)dx (или по известной ее производной F'(x)=f(x)) т.е. действие обратное дифференцированию, называются ***интегрированием***, а искомая функция F(x) называется **первообразной** функцией от функции f(x).

Определение: Совокупность всех первообразных F(x)+C от функции f(x) называется неопределенным интегралом от этой функции:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Основные формулы интегрирования.

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, n ≠ -1
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
4. $\int \sin u du = -\cos u + C$
5. $\int \cos u du = \sin u + C$
6. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$
7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$
8. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$
9. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец, определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x,\ dt = \cos x dt.$

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2}x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1;\quad dt = 2xdx;\quad dx = \dfrac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1 = t;\quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$(uv)' = u'v + v'u$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \begin{cases} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{cases} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$$= \begin{cases} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{cases} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x} \cos x dx = \begin{cases} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{cases} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$

$$= \begin{cases} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{cases} = e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx\right] = e^{2x} \sin x +$$

$$+ 2e^{2x} \cos x - 4\int \cos x e^{2x} dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Практическая работа

Тема: Вычисление производных суммы, разности, произведения, частного функций
Вычисление производных сложных и обратных функций

Цель работы: приобрести навыки вычисления производной функции.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\frac{1}{2}x^6+3x^4+2x^3-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-11x+37$;

б) $y=\frac{x^4+8x^2-3x+13}{x^5+\frac{1}{3}x^3+5x^2-26}$;

в) $y=\cos x(x^3-5x-\sqrt{11})$.

2. Найти производные сложных функций:

а) $y=\ln^2(5^{x+1}+e^x)$;

б) $y=-x^e+tgln(8x^2+5x)$.

Вариант 2

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\frac{3}{5}x^{10}+x^8-6x^5-x^4-\sqrt{11}x^2-x$;

б) $y=\frac{2x^5-\frac{1}{2}x^2-3}{4x^7+3x^6-2x^3-26x}$;

в) $y=\cos x(\frac{1}{3}x^6-5x^2+2x-\sqrt{7})$.

2. Найти производные сложных функций:

а) $y=\cos^2(e^{2x^3+3x^2+11})$;

б) $y=-e^{4x}+\ln(x^2-x)$.

,***Пояснения к работе:*** Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Что такое производная функции в точке?
2. Как звучит геометрический смысл производной?
3. Физический смысл производной?
4 Правила дифференцирования?
5. Таблица производных?
6. Понятие сложной функции?
7. Чему равна производная сложной функции?
8. Уравнение касательной к графику функции?

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с

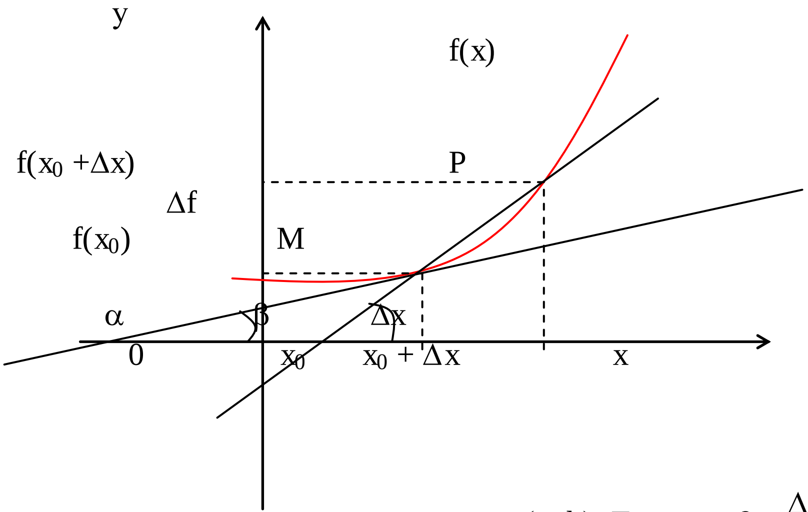
.**2**. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-

М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352 с
3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил.

Приложение:

Определение. Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha,}$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*
Понятно, что это условие не является достаточным.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$- функции, дифференцируемые в точке х.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$
3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$;
2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;
3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
5) $\left(e^x\right)' = e^x$
6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
7) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
8) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln x}$
9) $(\sin x)' = \cos x$
10) $(\cos x)' = -\sin x$
11) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
12) $(ctgx)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
16) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции.

Теорема. *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*
Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$, т.к. u = g(x) – непрерывная функция)

Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Теорема доказана.

Практическая работа

Тема: Вычисление первого замечательного предела
Вычисление второго замечательного предела
Цель работы: овладеть навыками вычисления замечателых пределов.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4}$ при а) $x_0=2$; б) $x_0=4$

2. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{3-x}}{x+2}$.

Вариант 2

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25}$ при а) $x_0=2$; б) $x_0=5$

2. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}$

,***Пояснения к работе:*** Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Что называется пределом функции в точке?

2. Как раскрывается неопределенность 1^{∞} ?
3. Первый замечательный предел?
4. Пределы суммы, произведения и частного двух функций?
5. Какая величина называется бесконечно большой?
6. Какая величина называется бесконечно малой?
7. Как выглядит второй замечательный предел?
8. Какие замечательные пределы вы еще знаете?

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с

3. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352 с**3.** Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил.

Приложение:

Пусть функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точка **а**, кроме быть может, самой точки **а**.

Число b называется пределом функции в точке **a**, если для любой последовательности значений аргумента сходящейся к **a** (x_n=a), соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится и при том каждый раз к числу b.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow (x_n) \to a(x_n \neq a) \Rightarrow f(x_n) \to b$$

Теорема. Функция y=f(x) в данной точке **a** не может иметь более одного предела.

<u>Основные теоремы о пределах.</u>

<u>**Теорема 1.**</u> $\lim_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x\to a$.

<u>**Теорема 2.**</u> $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

<u>**Теорема 3.**</u> $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

<u>**Следствие.**</u> $\lim_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim_{x\to a} f(x)$

<u>**Теорема 4.**</u> $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, при $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

<u>**Теорема 5.**</u> *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, *то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

<u>**Теорема 6.**</u> *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} u(x) = A$, *то и* $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

<u>**Определение.**</u> Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что $|f(x)|<M$ вблизи точки x = a.

<u>**Теорема 7.**</u> *Если функция f(x) имеет конечный предел при $x\to a$, то она ограничена вблизи точки x = a.*

<u>Бесконечно малые функции.</u>

<u>**Определение.**</u> Функция f(x) называется **бесконечно малой** при $x\to a$, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях а функция может быть бесконечно малой или нет.

<u>Пример.</u> Функция f(x) = x^n является бесконечно малой при $x\to 0$ и не является бесконечно малой при $x\to 1$, т.к. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

<u>**Теорема.**</u> *Для того, чтобы функция f(x) при $x\to a$ имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ ($\alpha(x)\to 0$ при $x \to a$).

<u>**Свойства бесконечно малых функций:**</u>

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при $x\to a$.

4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

Доказательство теоремы 2. Представим f(x) = A + α(x), g(x) = B + β(x), где $A = \lim\limits_{x\to a} f(x), \quad B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, тогда

$$f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$$

A + B = const, α(x) + β(x) – бесконечно малая, значит

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Представим f(x) = A + α(x), g(x) = B + β(x), где $A = \lim\limits_{x\to a} f(x), \quad B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, тогда

$$f(x)\cdot g(x) = A\cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$

A$\cdot$B = const, α(x) и β(x) – бесконечно малые, значит

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} A\cdot B + 0 = A\cdot B = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Теорема доказана.

Бесконечно большие функции и их связь с
бесконечно малыми.

Определение. Предел функции f(x) при x$\to$a, где a- число, **равен бесконечности**, если для любого числа M>0 существует такое число Δ>0, что неравенство

$$|f(x)| > M$$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

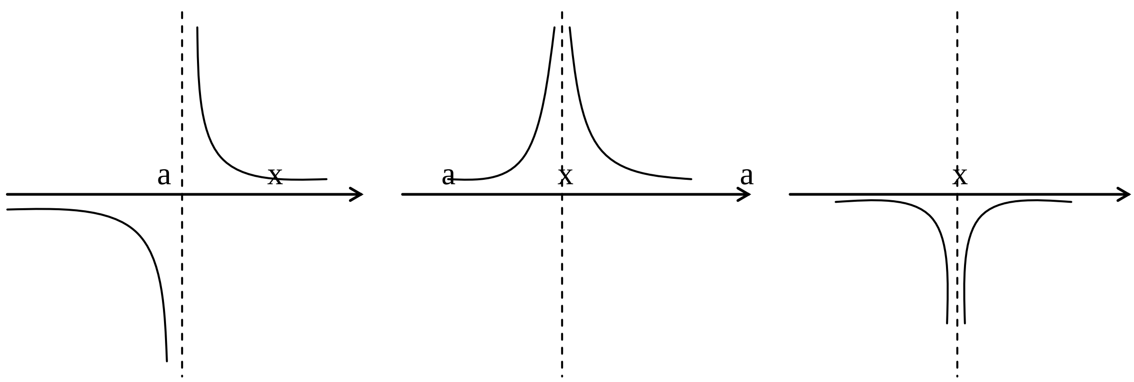
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие |f(x)|>M на f(x)>M, то получим:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на f(x)<M, то:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение. Функция называется **бесконечно большой** при x$\to$a, где a – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. *Если $f(x)\to 0$ при $x\to a$ (если $x\to\infty$) и не обращается в ноль, то*

$$y=\frac{1}{f(x)}\to\infty$$

Вычисление пределов

Предел функции не зависит от того, что определена она в предельной точке или нет. Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

1. Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, либо предел элементарной функции f(x) при x, стремящемся к значению **a**, которое входит в область ее определения, равен частному значению функции при x=a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Пример.
Найти предел функции: $f(x)=x^3-5x^2+2x+4$ при $x\to -3$
Решение: Данная функция является элементарной, она определена в предельной точке, поэтому находим предел функции как ее частное значение в предельной точке:

$$\lim_{x\to -3} f(x)=f(-3)=(-3)^3-5(-3)^2+2(-3)+4=-74$$

2. Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

Виды неопределенностей.

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^{\infty},0^{0}$$

а) Случай, когда при $x\to a$ при $x\to\infty$ функция f(x) представляет отношения двух б/м величин (неопределенность $\frac{0}{0}$)

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2-6x+8=0;$	$x^2-8x+12=0;$
D = 36 – 32 = 4;	**D = 64 – 48 = 16;**
$x_1=(6+2)/2=4;$	$x_1=(8+4)/2=6;$
$x_2=(6-2)/2=2;$	$x_2=(8-4)/2=2;$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Пример. Найти предел.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$

$=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1$.

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{9}{16}$$

б) Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция f(x) представляет отношение двух б/б величин (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$)

Пример. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-1}{5x^4+2x}$

Решение: Убедимся, что имеет место случай (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$), тогда подвергаем функцию преобразованиям. Деля числитель и знаменатель дроби на x^4 (наивысшая степень x), находим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-1}{5x^4+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^4}}{5+\frac{2}{x^4}}=\frac{3-0}{5+0}=\frac{3}{5}$$

в) Случай, когда при $x\to a$ или при $x\to\infty$ функция f(x) представляет степень, основание которой стремится к середине, а показатель к бесконечности (неопределенность 1^∞). В этом случае для нахождения предела используется замечательный предел:

$$\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=\lim_{a\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Пример. Найти предел функции: $\lim\limits_{a\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$

Решение: Исключив целую часть из дроби, полагаем $t=-\frac{5}{x+2}$

$$\lim_{a\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{5}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{a\to 0}(1+t)^{-\frac{10}{t}-3}=\left(\lim_{a\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-10}\cdot\lim_{a\to 0}(1+t)^{-3}=e^{-10}\cdot 1=e^{-10}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{matrix}y=x-1\\x\to\infty\\y\to\infty\end{matrix}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^{4}$$

Замечательные пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (х есть радиальная мера угла)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{In(1+x)}{x}=1$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha$ е или $\lim\limits_{x\to 0}(1+e)^{\frac{1}{t}}=e$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Практическая работа

Тема: Вычисление пределов функции на бесконечности

Цель работы: овладеть навыками вычисления пределов функции на бесконечности.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x^3-28}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Вариант 2

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+26x^5-4}{2x^2+x^3-28}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x^4+50}$

,***Пояснения к работе:*** Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1.Что называется пределом функции?
2. Какие виды неопределенностей вы знаете?
3. Понятие бесконечно малой величины?
4. Пределы суммы, произведения и частного двух функций?
5. Понятие бесконечно большой величины?
6. Понятие предела функции в точке и на бесконечности?
7. Правила раскрытия неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.?
8. Связь между бесконечно малой и бесконечно большой величинами?

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с

2. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.- М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352 с
3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил.

Приложение:
Пусть функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точка **a**, кроме быть может, самой точки **a**.
Число b называется пределом функции в точке **a**, если для любой последовательности значений аргумента сходящейся к **a** (x_n=a), соответствующая последовательность значений функции f(x_n) сходится и при том каждый раз к числу b.

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow (x_n)\to a(x_n\neq a)\Rightarrow f(x_n)\to b$$

Теорема. Функция y=f(x) в данной точке **a** не может иметь более одного предела.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, при $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, *то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, *то и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что │f(x)│<M вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Бесконечно малые функции.

Определение. Функция f(x) называется **бесконечно малой** при x→a, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях а функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция f(x) = x^n является бесконечно малой при x→0 и не является бесконечно малой при x→1, т.к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

Теорема. *Для того, чтобы функция f(x) при x→a имела предел, равный А, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$).

<u>Свойства бесконечно малых функций:</u>

5) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
6) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
7) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.
8) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

<u>Определение.</u> Предел функции f(x) при $x \to a$, где a- число, **равен бесконечности**, если для любого числа M>0 существует такое число $\Delta>0$, что неравенство

$$|f(x)| > M$$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

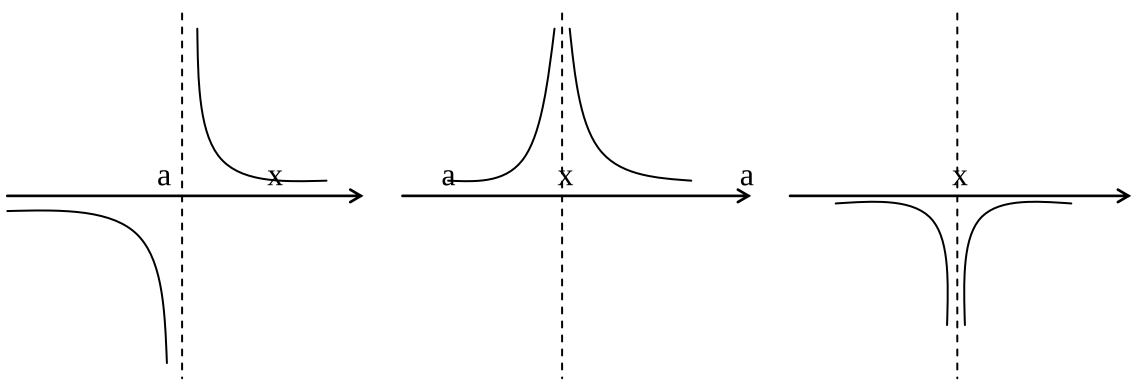
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$, то получим:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на $f(x) < M$, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



<u>Определение.</u> Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, где a – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> *Если $f(x) \to 0$ при $x \to a$ (если $x \to \infty$) и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

Вычисление пределов

Предел функции не зависит от того, что определена она в предельной точке или нет. Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, либо предел элементарной функции f(x) при x, стремящемся к значению **a**, которое входит в область ее определения, равен частному значению функции при x=a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Пример.

Найти предел функции: $f(x)=x^3-5x^2+2x+4$ при $x \to -3$

Решение: Данная функция является элементарной, она определена в предельной точке, поэтому находим предел функции как ее частное значение в предельной точке:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3) = (-3)^3 - 5(-3)^2 + 2(-3) + 4 = -74$$

3. Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

Виды неопределенностей.

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^{0}$$

а) Случай, когда при $x \to a$ при $x \to \infty$ функция f(x) представляет отношения двух б/м величин (неопределенность $\frac{0}{0}$)

б) Случай, когда при $x \to a$ или $x \to \infty$ функция f(x) представляет отношение двух б/б величин (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$)

Пример. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 1}{5x^4 + 2x}$

Решение: Убедимся, что имеет место случай (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$), тогда подвергаем функцию преобразованиям. Деля числитель и знаменатель дроби на x^4 (наивысшая степень x), находим:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 1}{5x^4 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x^4}}{5 + \frac{2}{x^4}} = \frac{3-0}{5+0} = \frac{3}{5}$$

в) Случай, когда при $x \to a$ или при $x \to \infty$ функция f(x) представляет степень, основание которой стремится к середине, а показатель к бесконечности (неопределенность 1^{∞}). В этом случае для нахождения предела используется замечательный предел:

$$\lim_{a\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = \lim_{a\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Задание 1. Вычислите пределы числовых последовательностей:

$$а)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$$

Решение

При $n\to+\infty$ числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают, следовательно, нельзя применить теорему о пределе частного двух последовательностей.

Разделив числитель и знаменатель на старшую степень n, т. е. на $n^2\neq 0$ при $n\to+\infty$, получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$. Учитывая,

что последовательности $\frac{3}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ являются бесконечно малыми, и используя свойства бесконечно малых последовательностей, окончательно будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{1}=0.\ \text{Итак,}\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}=0.$$

$$б)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}$$

Решение

Разделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень n, т. е. на $n^3\neq 0$ при $n\to+\infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}.$$

При $n\to+\infty$ последовательность $\left(1-\frac{1}{n^3}\right)$ является сходящейся и имеет предел, равный 1, а последовательность $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)$ является бесконечно малой и имеет предел, равный 0, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}=+\infty$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=+\infty$.

$$в)\ \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1}$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

[Здесь первоначально числитель и знаменатель дроби умножили на ненулевое сопряженное выражение $\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)$.]

Задание 2. Вычислите пределы функций, используя правила предельного перехода

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x}$;

Решение. При $x\to+\infty$ числитель и знаменатель неограниченно увеличиваются, следовательно, получаем неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для вычисления предела преобразуем данную дробь, разделив числитель и знаменатель на старшую степень переменной, т.е. на $x^4\neq 0$ при $x\to+\infty$.

Пользуясь свойствами пределов, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^4}}{4-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-1+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(-1)+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{-1+0+0}{4-0+0}=-\frac{1}{4}.$$

Практическая работа

Тема: Вычисление пределов функции в точке
Цель работы: овладеть навыками вычисления пределов функции в точке.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$ при а) $x_0=2$; б) $x_0=4$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$.

Вариант 2

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$ при а) $x_0=2$; б) $x_0=5$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$

,***Пояснения к работе:*** Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1.Что называется пределом?
2. Как раскрывается неопределенность 0/0?
3. Чему равен предел константы?
4. Пределы суммы, произведения и частного двух функций?
5. Какая функция называется бесконечно большой?
6. Какая функция называется бесконечно малой?
7. Какая функция называется ограниченной?
8. Перечислите свойства бесконечно малых функций?

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с
2. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352 с
3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил.

Приложение:

Пусть функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точка **a**, кроме быть может, самой точки **a**.

Число b называется пределом функции в точке **a**, если для любой последовательности значений аргумента сходящейся к **a** (x_n=a), соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится и при том каждый раз к числу b.

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow (x_n)\to a(x_n\neq a)\Rightarrow f(x_n)\to b$$

Теорема. Функция y=f(x) в данной точке **a** не может иметь более одного предела.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, при $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$*, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} u(x)=A$*, то и* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что │f(x)│<M вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Бесконечно малые функции.

Определение. Функция f(x) называется **бесконечно малой** при x→a, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция f(x) = x^n является бесконечно малой при x→0 и не является бесконечно малой при x→1, т.к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

Теорема. *Для того, чтобы функция f(x) при x→a имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где α(x) – бесконечно малая при x → a (α(x)→0 при x → a).

Свойства бесконечно малых функций:

9) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.
10) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.

11) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при $x \to a$.
12) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

Доказательство теоремы 2. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $A = \lim\limits_{x \to a} f(x), \quad B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, тогда

$$f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$$

$A + B = \text{const}$, $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая, значит

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $A = \lim\limits_{x \to a} f(x), \quad B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, тогда

$$f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$

$A \cdot B = \text{const}$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые, значит

$$\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} A \cdot B + 0 = A \cdot B = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Теорема доказана.

Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.

Определение. Предел функции f(x) при $x \to a$, где a- число, **равен бесконечности**, если для любого числа $M>0$ существует такое число $\Delta>0$, что неравенство

$$|f(x)| > M$$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

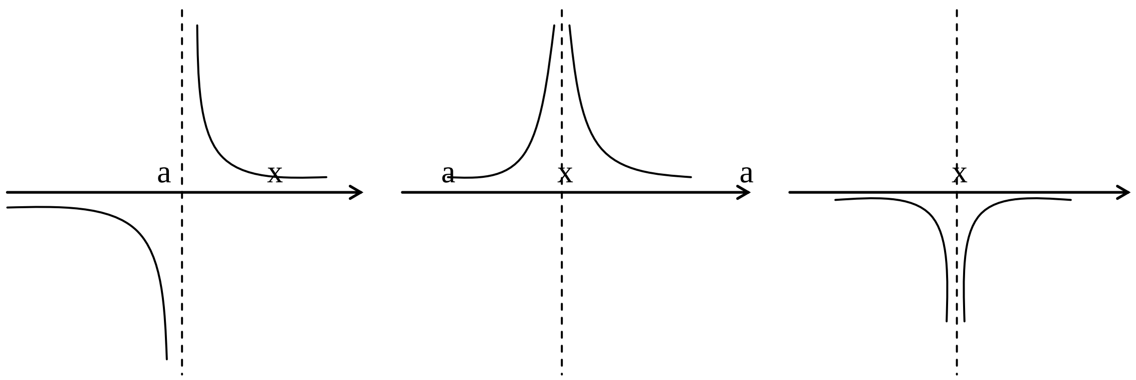
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)|>M$ на $f(x)>M$, то получим:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на $f(x)<M$, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение. Функция называется **бесконечно большой** при x→a, где a – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. *Если f(x)→0 при x→a (если x→∞) и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

Вычисление пределов

Предел функции не зависит от того, что определена она в предельной точке или нет. Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

4. Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, либо предел элементарной функции f(x) при x, стремящемся к значению **a**, которое входит в область ее определения, равен частному значению функции при x=a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Пример.
Найти предел функции: $f(x)=x^3-5x^2+2x+4$ при $x \to -3$
Решение: Данная функция является элементарной, она определена в предельной точке, поэтому находим предел функции как ее частное значение в предельной точке:
$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = f(-3) = (-3)^3 - 5(-3)^2 + 2(-3) + 4 = -74$

5. Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

Виды неопределенностей.

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^0$$

а) Случай, когда при $x \to a$ при $x \to \infty$ функция f(x) представляет отношения двух б/м величин (неопределенность $\frac{0}{0}$)

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 - 6x + 8 = 0;$	$x^2 - 8x + 12 = 0;$
D = 36 – 32 = 4;	D = 64 – 48 = 16;
$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$	$x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$
$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$	$x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-4}{x-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Пример. Найти предел.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$

$=\dfrac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1$.

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{9}{16}$$

б) Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция f(x) представляет отношение двух б/б величин (неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Пример. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-1}{5x^4+2x}$

Решение: Убедимся, что имеет место случай (неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$), тогда подвергаем функцию преобразованиям. Деля числитель и знаменатель дроби на x^4 (наивысшая степень x), находим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-1}{5x^4+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^4}}{5+\frac{2}{x^4}}=\frac{3-0}{5+0}=\frac{3}{5}$$

в) Случай, когда при $x\to a$ или при $x\to\infty$ функция f(x) представляет степень, основание которой стремится к середине, а показатель к бесконечности (неопределенность 1^{∞}). В этом случае для нахождения предела используется замечательный предел:

$$\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=\lim_{a\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Пример. Найти предел функции: $\lim\limits_{a\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$

Решение: Исключив целую часть из дроби, полагаем $t=-\dfrac{5}{x+2}$

$$\lim_{a\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{5}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{a\to 0}(1+t)^{-\frac{10}{t}-3}=\left(\lim_{a\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-10}\cdot\lim_{a\to 0}(1+t)^{-3}=e^{-10}\cdot 1=e^{-10}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{matrix}y=x-1\\x\to\infty\\y\to\infty\end{matrix}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^{4}$$

Замечательные пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (x есть радиальная мера угла)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{In(1+x)}{x}=1$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha$ е или $\lim\limits_{x\to 0}(1+e)^{\frac{1}{t}}=e$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$

Решение

При $x=-2$ числитель и знаменатель обращаются в 0, следовательно, получаем неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Преобразуем данную дробь, разложив числитель и знаменатель на множители по формуле разложения квадратного трехчлена:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}=\lim_{x\to -2}\frac{3(x+2)\left(x-\frac{7}{3}\right)}{(x+6)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{3x-7}{x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(3x-7)}{\lim\limits_{x\to -2}(x+6)}=$$

$$=\frac{3(-2)-7}{-2+6}=-\frac{13}{4}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$

Решение

При $x = 5$ числитель и знаменатель обращаются в 0, следовательно, получаем неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Преобразуем дробь. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на произведение $\left(\sqrt{x+4}+3\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right) \neq 0$ при $x \to 5$ (сопряженные выражения):

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)(\sqrt{x+4}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\left(\left(\sqrt{x+4}\right)^2-3^2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{\left(\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2^2\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}=\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x+4}+3}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to5}(\sqrt{x-1}+2)}{\lim\limits_{x\to5}(\sqrt{x+4}+3)}=\frac{\sqrt{5-1}+2}{\sqrt{5+4}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Практическая работа

Тема: Вычисление определённого интеграла методами трапеции и прямоугольника

Цель: Познакомить учащихся с методами приближённого вычисления определённого интеграла.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

1. Вычислить $\int_0^2 e^x dx$ методом прямоугольников, разделив отрезок [0;1] на 20 равных частей.
   Ответ: $I \approx 6{,}02344$, $\Delta = 0{,}26656$, $\delta = 4{,}24\%$.
2. Вычислить методом трапеций $\int_1^{1.5} \frac{dx}{x}$ при $\Delta x = 0{,}1$.
3. Вычислить методом трапеций $\int_0^2 xdx$ при $\Delta x = 0{,}1$.
4. Вычислить методом трапеций $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ при $\Delta x = 0{,}25$.
5. Вычислить $\int_0^4 \left(3x^2 + 4x + 2\right)dx$, разделив отрезок [0;4] на 40 равных частей.
6. Вычислить $\int_0^8 \frac{dx}{x+1}$, разделив отрезок [0;8] на 40 равных частей.
7. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx$, при $\Delta x = 0{,}2$.

,***Пояснения к работе:*** Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Формула прямоугольников.
2. Формула трапеций.

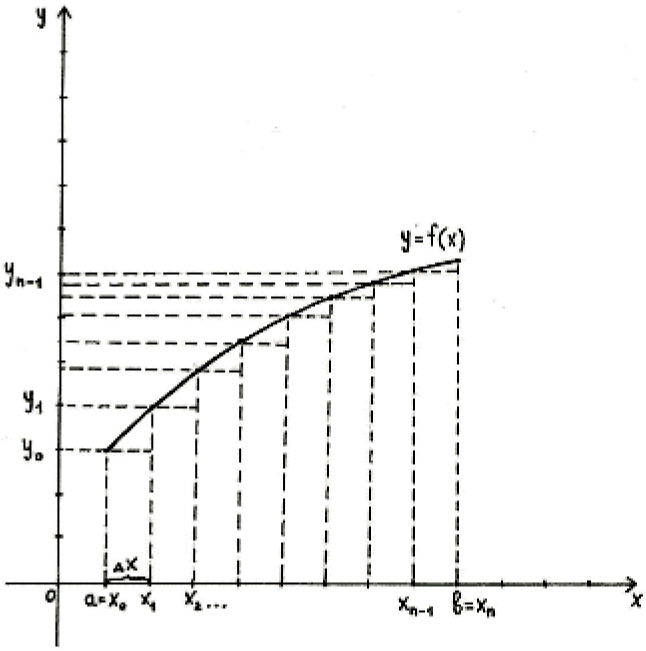
Приложение.

Решение многих технических задач сводится к вычислению определённых интегралов, точное выражение которых сложно, требует длительных вычислений и не всегда оправдано практически. Здесь бывает вполне достаточно их приближённого значения.

Пусть, например, необходимо вычислить площадь, ограниченную линией, уравнение которой неизвестно. В этом случае можно заменить данную линию более простой, уравнение которой известно. Площадь полученной таким образом криволинейной трапеции принимается за приближённое значение искомого интеграла.

Простейшим приближённым методом является метод прямоугольников. Геометрически идея способа вычисления определённого интеграла по формуле прямоугольников состоит в том, что площадь криволинейной трапеции *ABCD* заменяется суммой площадей прямоугольников, одна сторона которых равна $\frac{b-a}{n}$, а друга - $f(x_n)$.

Если суммировать площади прямоугольников, которые показывают площадь криволинейной трапеции с недостатком [Рисунок1], то получим формулу:

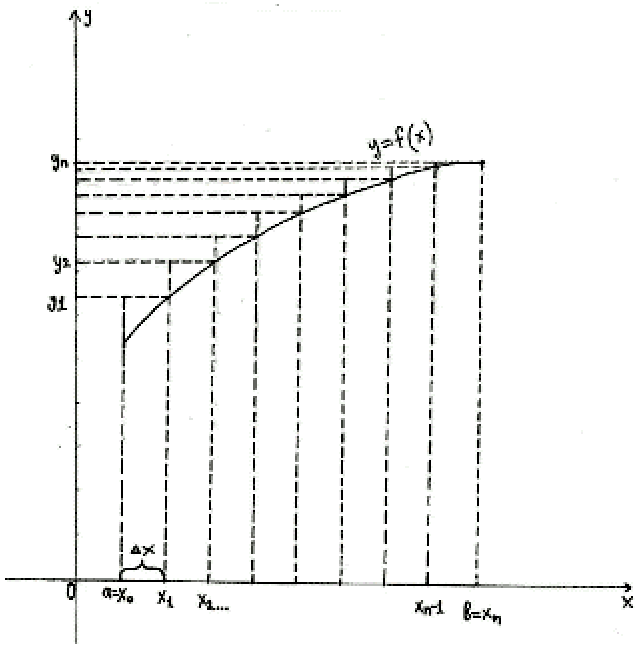


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{h}\,(y_0)+y_1+\ldots+y_{n-1}))$$

[Рисунок1]

то получим формулу: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$

Если с избытком



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)$$

[Рисунок2],

то $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)$

Значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$ находят из равенств $y_k = f(a + k\Delta x)$, $к = 0, 1\ldots, n$.Эти формулы называются *формулами прямоугольников* и дают приближённый результат. С увеличением *n* результат становится более точным.

Итак, чтобы найти приближённое значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$, нужно:

- разделить отрезок интегрирования [*a*, *b*] на n равных частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$;
- вычислить значения подынтегральной функции $y = f(x)$ в точках деления, т.е. найти $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_{n-1} = f(x_{n-1})$, $y_n = f(x_n)$;
- воспользоваться одной из приближённых формул.

Для того, чтобы найти погрешность вычислений, надо воспользоваться формулами:

$$\Delta = |A_{точн} - A_{прибл}|$$

$$\delta = \frac{\Delta}{|A_{точн}|} \cdot 100\%$$

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_2^5 x^2 dx$. Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.

Решение:

Разобьём отрезок [a, b] на несколько (например, на 6) равных частей. Тогда a = 0, b = 3

, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-2}{6} = \frac{1}{2}$

$x_k = a + k \cdot \Delta x$

$x_0 = 2 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$x_1 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$

$x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$x_3 = 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$x_4 = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$x_5 = 2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5$

$f(x_0) = 2^2 = 4$

$f(x_1) = 2{,}5^2 = 6{,}25$

$f(x_2) = 3^2 = 9$

$f(x_3) = 3{,}5^2 = 12{,}25$

$f(x_4) = 4^2 = 16$

$f(x_5) = 4{,}5^2 = 20{,}25$.

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	4	6,25	9	12,25	16	20,25

По формуле (1):

$$\int_0^3 x^2 dx \approx \frac{1}{2} \cdot (4 + 6{,}25 + 9 + 12{,}25 + 16 + 20{,}25) = \frac{1}{2} \cdot 67{,}75 = 33{,}875$$

Для того, чтобы вычислить относительную погрешность вычислений, надо найти точное значение интеграла:

$$\int_2^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39$$

$$\Delta = |39 - 33{,}875| = 5{,}125$$

$$\delta = \frac{5{,}125}{39} \cdot 100\% \approx 13{,}14\%$$

Вычисления проходили долго и мы получили довольно-таки грубое округление. Чтобы вычислить этот интеграл с меньшим приближением, можно воспользоваться техническими возможностями компьютера.

Для нахождения определённого интеграла методом прямоугольников необходимо ввести значения подынтегральной функции *f(x)* в рабочую таблицу Excel в диапазоне $x \in [2;5]$ с заданным шагом $\Delta x = 0{,}1$.

1. Открываем чистый рабочий лист.
2. Составляем таблицу данных *(x* и *f(x))*. Пусть первый столбец будет значениями x, а второй соответствующими показателями *f(x)*. Для этого в ячейку A1 вводим слово *Аргумент*, а в ячейку B1 – слово *Функция*. В ячейку A2 вводится первое

значение аргумента – левая граница диапазона (*2*). В ячейку А3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*2,1*). Затем, выделив блок ячеек А2:А3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки А32, до значения $x=5$).

3. Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку В2 необходимо записать её уравнение. Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку В2 и с клавиатуры ввести формулу *=A2^2* (при английской раскладке клавиатуры). Нажимаем клавишу *Enter*. В ячейке В2 появляется *4*. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки В2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон В2:В32.
   В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.
4. Теперь в ячейке В33 может быть найдено приближённое значение интеграла. Для этого в ячейку В33 вводим формулу *= 0,1**, затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции *(f(x))*. В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК*. Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования В2:В31. Нажимаем кнопку *ОК*. В ячейке В33 появляется приближённое значение искомого интеграла с недостатком (*37,955*) .

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла (*39*), можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае равна

$\Delta = |39 - 37{,}955| = 1{,}045$

$$\delta = \frac{1{,}045}{39} \cdot 100\% = 0{,}02679 \cdot 100\% \approx 2{,}68\% .$$

Пример 2. Используя метод прямоугольников, вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ с заданным шагом $\Delta x = 0{,}05$.

Решение:

1. Для нахождения определённого интеграла значения подынтегральной функции *f(x)* должны быть введены в рабочую таблицу *Excel* в диапазоне $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ с заданным шагом $\Delta x = 0{,}05$. В созданную уже таблицу данных в ячейку А2 вводится левая граница интегрирования (*0*). В ячейку А3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*0,05*). Затем, выделив блок ячеек А2:А3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки А33, до значения $x=1{,}55$).
2. Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку В2 необходимо записать её уравнение. Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку В2. Здесь должно оказаться значение косинуса, соответствующее значению аргумента в ячейке А2. Для получения значения косинуса воспользуемся специальной функцией: нажимаем на панели инструментов кнопку Вставка функции (f_x) . В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию *COS*. Нажимаем кнопку *ОК*. Появляется диалоговое окно *COS*. Наведя указатель мыши на серое поле окна, при нажатой левой кнопке сдвигаем поле вправо, чтобы открыть столбец данных (*А*). Указываем значение аргумента косинуса щелчком мыши на ячейке А2. Нажимаем кнопку *ОК*. В ячейке В2

появляется *1*. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки B2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон B2:B33. В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.

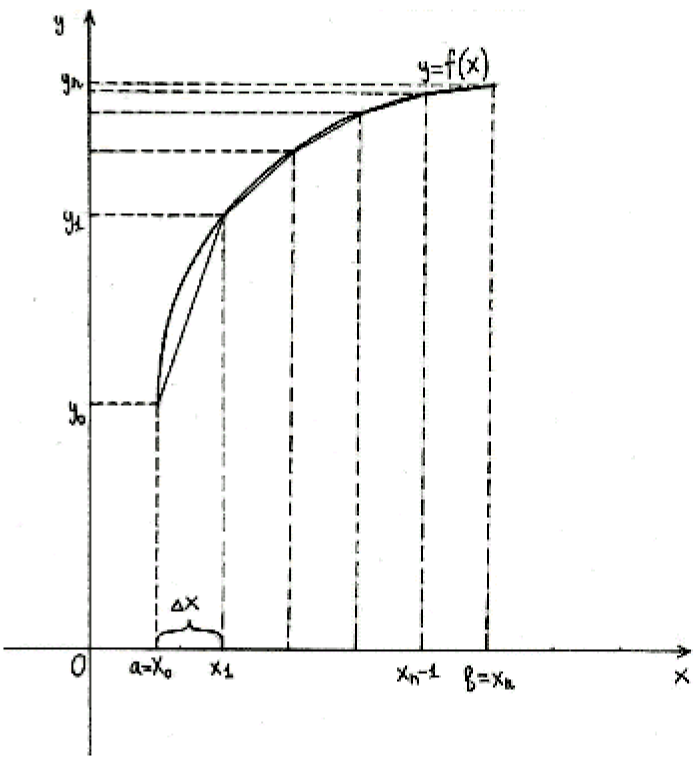
3. Теперь в ячейке B34 может быть найдено приближённое значение интеграла. Для этого в ячейку B34 вводим формулу = *0,05**, затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции ((f_x)) . В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК*. Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования B2:B32. Нажимаем кнопку *ОК*. В ячейке B34 появляется приближённое значение искомого интеграла с избытком (*1,024056*).

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1\right)$, можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае равна

$$\Delta = \left|1{,}024056 - 1\right| = 0{,}024056$$

$$\delta = \frac{0{,}024056}{1} \cdot 100\% \approx 2{,}41\%$$

Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Криволинейная трапеция заменяется на сумму нескольких трапеций и приближённое значение определённого интеграла находится как сумма площадей трапеций



$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

[Рисунок3]

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+...+y_{n-1}\right)$$

Пример 3. Методом трапеций найти $\int_0^{\pi} \sin\, xdx$ с шагом $\Delta x = 0,1$.

Решение.

1. Открываем чистый рабочий лист.
2. Составляем таблицу данных *(x* и *f(x))*. Пусть первый столбец будет значениями *x*, а второй соответствующими показателями *f(x)*. Для этого в ячейку A1 вводим слово *Аргумент*, а в ячейку B1 – слово *Функция*. В ячейку A2 вводится первое значение аргумента – левая граница диапазона (*0*). В ячейку A3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*0,1*). Затем, выделив блок ячеек A2:A3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки A33, до значения *x=3,1*).
3. Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку B2 необходимо записать её уравнение (в примере синуса). Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку B2. Здесь должно оказаться значение синуса, соответствующее значению аргумента в ячейке A2. Для получения значения синуса воспользуемся специальной функцией: нажимаем на панели инструментов кнопку Вставка функции *f(x)*. В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию *SIN*. Нажимаем кнопку *ОК*. Появляется диалоговое окно *SIN*. Наведя указатель мыши на серое поле окна, при нажатой левой кнопке сдвигаем поле вправо, чтобы открыть столбец данных (*A*). Указываем значение аргумента синуса щелчком мыши на ячейке A2. Нажимаем кнопку *ОК*. В ячейке B2 появляется 0. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки B2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон B2:B33. В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.
4. Теперь в ячейке B34 может быть найдено приближённое значение интеграла по методу трапеций. Для этого в ячейку B34 вводим формулу = *0,1*((B2+B33)/2+,* затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции *(f(x))*. В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК*. Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования B3:B32. Нажимаем кнопку *ОК* и ещё раз *ОК*. В ячейке B34 появляется приближённое значение искомого интеграла с недостатком (*1,997*) .

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла $(\int_0^{\pi} \sin\, xdx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (\cos 0) = -(-1)+1 = 2)$, можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае вполне приемлемая для практики.

$$\Delta = |1{,}997 - 2| = |-0{,}003| = 0{,}003$$

$$\delta = \frac{0{,}003}{2}\cdot 100\% = 0{,}0015\cdot 100\% = 0{,}15\%$$

Практическая работа

Тема: Построение графиков функций с помощью производной
Цель работы: Применение производной к исследованию функций и построению графиков функций.

.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1

Исследовать функцию с помощью производной и построить её график.
а) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ б) $y = 1 + 2x^2 - x^4$

Вариант 2

Исследовать функцию с помощью производной и построить её график.
а) $y = 2 + 3x \ - x^3$ б) $y = x^4 - 2x^2 + 2$

,***Пояснения к работе:*** Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Найти область определения функции
2. Производную
3. Стационарные точки
4. Производную
5. Промежутки возрастания и убывания
6. Точки экстремума и значение функции в этих точках.

Литература:

1. Ш.А.Алимов «Алгебра и начала анализа» 10-11 кл. , стр. 267 - 271

Приложение.

Общее исследование функции и построение её графика рекомендуется выполнять по следующей схеме:

2. Найти область определения функции
2. Производную

3. Стационарные точки
4. Производную
5. Промежутки возрастания и убывания
6. Точки экстремума и значение функции в этих точках.

Задача

Построить график функции $f(x)=x^3-2x^2+x$

Решение

2. Производная : $f'(x)=3x^2-4x+1$

1. Область определения: $x\in R$

3. Стационарные точки: $f'(x)=0$

$$3x^2-4x+1=0 \qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{4\pm 2}{6} \qquad x_1=1 \qquad x_2=\frac{1}{3}$$

5. Промежутки возрастания и убывания

$x_1=\frac{1}{3}-$ *максимум* $\qquad x_1=1-$ *минимум*

6. Точки экстремума и значение функции в этих точках.

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27} \qquad f(1)=0$

$\left(\frac{1}{3};\frac{4}{27}\right)$ *– точка максимума* $\quad (1;0)$ *– точка минимума*

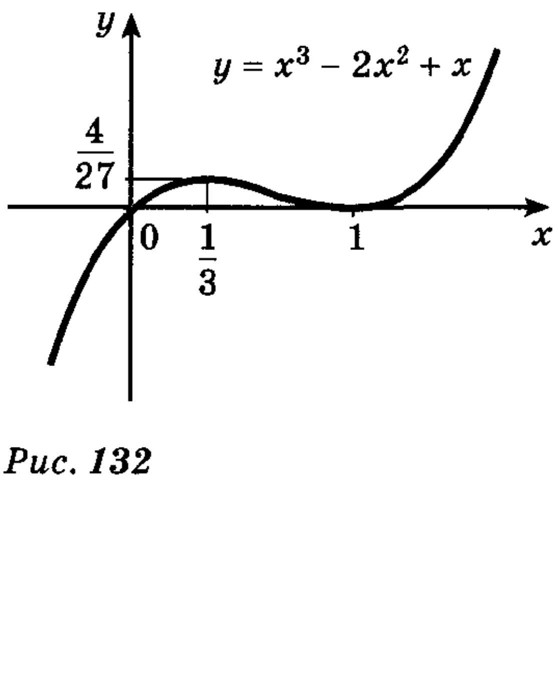


Рис. 132

Практическая работа

Тема: Вычисление производных высших порядков
Цель работы: *1)повторить понятие производной функции, правила дифференцирования;*

2) научиться вычислять производные данных функций.

..

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1

1.Найдите производные функций и вычислите их значение в указанных точках

а) f(x)= $6x^2 + 4x - 2$, $f'(1)$; б) f(x)= $\frac{2x+1}{x-3}$,$f'(0)$;

в) f(x)=$e^x \cdot \cos x$; г) f(x) = $(5x-2)^4$;

д)f(x)=(5-x)$\cdot \sqrt{4+2x}$.

2**.** Напишите уравнение касательной к графику функции f(x)=$x^3 - 3x^2 + x - 1$в точке с абсциссой$x_0 = 1$.

Вариант 2

1.Найдите производные функцийивычислите их значение в указанных точках

а) f(x)= $5x^2 + 3x + 6$, $f'(1)$; б) f(x)= $\frac{2x-3}{x+1}$, $f'(0)$;

в) f(x)=$e^x \cdot \sin x$; г) f(x)=cos(2x+5);

д) f(x)=(3-2x)$\cdot \sqrt{5-x}$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функцииf(x)= $2x^3 + x^2 - 4x + 3$в точке с абсциссой$x_0 = 1$.

,***Пояснения к работе:*** Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1.Что называют производной функции?

2.Производные каких элементарных функций существуют?

3.Какие правила дифференцирования вы знаете? Какие из них применяются в данной работе?

4. Как вычислить производную сложной функции?

Литература

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.116-122.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009, стр.137-152.

Практическая работа

Тема: **Классификация точек разрыва функции**

Цель работы: 1)изучить понятия: одностороннийпредел справа, односторонний предел слева,точки разрыва функции, виды точек разрыва;

2) научиться вычислять односторонние пределы данных функций, находить точки разрыва функций, определять их виды.

..

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Вариант 1

1. Вычислите левый и правый пределы функции y = f(x) при x →a, если: а)f(x) = cosx, a = $\frac{\pi}{2}$;б) f(x) = $\begin{matrix} x-2 \\ ¿ \\ ¿ \\ ¿ \\ \frac{1}{¿} \end{matrix}$, a = 2.
2. Найдите точки разрыва и их вид для функции y = $\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.
3. Найдите точки разрыва и их вид для функции $y=\begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2}, x<-2 \\ \sqrt{4-x^2}, \quad -2\le x\le 2 \\ \frac{1}{x-2}, x>2 \end{cases}$

Вариант 2

1. Вычислите левый и правый пределы функции y = f(x) при x →a, если: а) f(x) = sinx, a = π;б) f(x) = $\frac{1}{2^x-1}$, a = 0.
2. Найдите точки разрыва и их вид для функции y = $\frac{e^x-1}{x}$.
3. Найдите точки разрыва и их вид для функции *y* = $\begin{matrix} ¿ \\ \frac{|x+1|}{x+1} \cdot x-1, если x\ne -1 \\ 1, если x=-1 \\ ¿ \\ ¿ \end{matrix}$

,***Пояснения к работе:*** Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. 1 Сформулируйте определение предела функции при x →a.
2. Что называют односторонним пределом функции справа, слева?
3. Что называют точкой разрыва функции?
4. Какие бывают виды точек разрыва функции?
5. Как определить вид точки разрыва функции?

Литература

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс, 2009, стр.112-114,132-134.

Практическая работа

Тема: Решение линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Цель занятия:

1. *изучить понятия: дифференциальное уравнение высшего порядка, дифуравнение второго порядка, общее решение дифференциального уравнения второго порядка, задача Коши;*
2. *рассмотреть способы решения линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка;*
3. *научиться находить общее и частное решения линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1

1. Найдите общее решение дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = x + \sin x$.
2. Найдите частное решение линейного дифференциального уравнения $y''+ 3y'+ 2y = 0$, если $y = -1$, $y'=3$ при $x=0$.
3. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''+ y'- 2y = 4x$.

Вариант 2

1. Найдите общее решение дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = x^2 - \cos x$.
2. Найдите частное решение линейного дифференциального уравнения $y''- 5y'+ 6y = 0$, если $y = 1$, $y'= -1$ при $x=0$.
3. Найдите общее решение дифференциальное уравнение $y''- 5y'+ 4y = 2x-1$.

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение дифференциального уравнения высшего порядка, дифуравнения второго порядка.
2. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения второго порядка.
3. В чём заключается задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка?
4. Как найти общее и частное решения линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами?

Литература

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.284-302.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айри

Практическая работа

Тема: Решение практических задач с помощью дифференциальных уравнений.

Цель занятия:

1) рассмотреть задачи, решение которых приводит к дифференциальным уравнениям;

2) научиться использовать дифференциальные уравнения для решения прикладных задач.

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы
Вариант 1

1. Ускорение прямолинейно движущейся материальной точки выражается формулой $a(t) = 12t + 2$. Найдите закон движения, если в начальный момент времени $t = 0$ скорость $v = 2$м⁄с, а путь $S = 0$ м.

2. Металлический шар, температура которого вначале опыта была равна 10˚С, охлаждается струёй воды, имеющей температуру 0˚С.Через 5 минут шар охладился до 8˚С. Считая скорость охлаждения тела пропорциональной разности между температурой тела и температурой охлаждающей среды, определите, в течении какого времени шар охладится до 5˚С.

Вариант 2

1. Ускорение прямолинейно движущейся материальной точки выражается формулой $a(t) = 12t - 6$. Найдите закон движения, если в начальный момент времени $t = 0$ скорость $v = 3$м⁄с, а путь $S = 0$ м.

2. Металлический шар, температура которого вначале опыта была равна 10˚С, охлаждается струёй воды, имеющей температуру 0˚С.Через 6 минут шар охладился до 6˚С. Считая скорость охлаждения тела пропорциональной разности между температурой тела и температурой охлаждающей среды, определите, в течении какого времени шар охладится до 4˚С

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение дифференциального уравнения.

2. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?

3. Перечислите решения каких задач приводят к дифференциальным уравнениям?

Литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс, 2009, стр.9-11.

2. Соловейчик И.Л. Сборник задач по математике с решениями для техникумов / И.Л. Соловейчик, В.Т. Лисичкин. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство « Мир и образование», 2007.стр. 394-402.

Практическая работа

Тема: Написание уравнения касательной к графику функции и её построение

Цель занятия:

приобрести навыки вычисления производной и составления уравнения касательной к графику функции.

Оборудование

ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1.

1. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=5x^3-3x^9;$

б) $f(x)=\sqrt[3]{x}+4\sqrt{x};$

в) $f(x)=x\cdot 2^x;$

г) $f(x)=\frac{\cos x}{2\sin x};$

д) $f(x)=\frac{\ln x}{4}+\frac{4}{x^5}+\frac{3}{tg\,x};$

2. Составьте уравнение касательной к заданной кривой в точке $M(1,2)$. Сделайте чертеж.

$y(x)=x^2+\frac{1}{x}$

3. Тело движется по закону $s=3t^3+2t$(м). Найдите v(1)-? a(1).

Вариант 2.

1. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=2x^5-2x^4+\frac{1}{2}x^2-2$

б) $f(x)=e^x\sin x;$

в) $f(x)=\cos x\sin x+ctg\,x;$

г) $f(x)=\frac{\ln x}{2x^3+1};$

д) $f(x)=5^x(\sin x+tg\,x)$

2. Составьте уравнение касательной к заданной кривой в точке $M(1,2)$. Сделайте чертеж.

$y(x)=\sqrt{x+3}$

3. Тело движется по закону $s=4t^2-2t^3$(м). Вычислите v и а при t= 1сек.

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе

Контрольные вопросы

.1 Что такое производная?
2. В чем заключается физический смысл производной?
3.В чем заключается геометрический смысл производной?
4Запишите формулы производная произведения и производная частного?

5. Запишите уравнение касательной к графику функции в точке М(x_0;y_0) ?

6. Запишите таблицу производных элементарных функций?

7. По какой формуле находят ускорение тело?

8. Запишите условия при которых угол наклона касательной к графику функции и осью ОХ меняет направлении (острый, тупой, прямой)?

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с

2. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352
3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил. –
3.

Приложение:

Пусть функция *f(x)* определена на промежутке *(a; b)*, x_0 и $x_0+\Delta x$ - точки этого промежутка. **Производной функции *f(x)* в точке** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$. Обозначается $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Когда предел принимает конкретное конечное значение, то говорят о существовании *конечной производной в точке*. Если предел бесконечен, то говорят, что *производная бесконечна в данной точке*. Если же предел не существует, то и *производная функции в этой точке не существует*.

Функцию *f(x)* называют **дифференцируемой в точке** x_0, когда она имеет в ней конечную производную.

Если зависимость расстояния от времени представляет собой функцию $S(x)$, то, чтобы найти скорость тела в момент времени t_0, нужно найти значение производной функции $S(x)$ в точке t_0:

$$v\left(t_0\right)=S'\left(t_0\right)$$

Пример 1:

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+17$, где $x(t)$ — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=9c$.

Решение:

1. Найдем производную функции $x(t)=6t^2-48t+17$:

$$x'(t)=12t-48$$

2. Найдем значение производной в точке $t=9$:

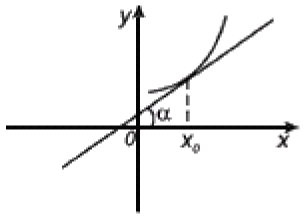
$$x'(9)=12\times 9-48$$

$$x'(9)=60$$

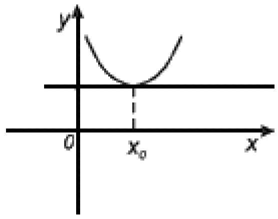
Ответ: 60 м/с.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции f(x) в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции y = f(x) в точке (x_0; *f*(x_0)).

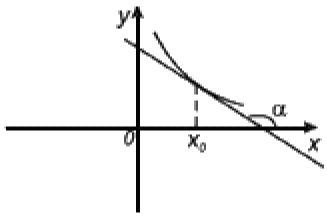
k= tgα = f'(x_0).



$f'(x_0) = \text{tg}\alpha > 0$



$f'(x_0) = \text{tg}\alpha = 0$



$f'(x_0) = \text{tg}\alpha < 0$

Уравнение касательной имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Правила дифференцирования

При дифференцировании константу можно выносить за производную:

$$(cf)' = cf'$$

Правило дифференцирования суммы функций:

$$(f+g)' = f' + g'$$

Правило дифференцирования разности функций:

$$(f-g)' = f' - g'$$

Правило дифференцирования произведения функций (правило Лейбница):

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Правило дифференцирования частного функций:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad g \neq 0$$

Правило дифференцирования сложной функции:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

Практическая работа

Тема: Вычисление производных с помощью логарифмического дифференцирования

Цель: закрепить навыки вычисления производных сложных функций

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задание для практической работы

Найти производную.

$$y=\frac{(x-1)^2(3x+1)}{(x+5)^2};$$

$$y=x^{5x};$$

$$y=(x^2+1)\sqrt{\frac{x(2x-1)}{(3x+5)\sqrt[3]{(x-5)^2}}};$$

$$y=x^2\cdot 5^{\sqrt{x}}\cdot\tan(x).$$

,***Пояснения к работе:*** Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.
Цель работы.
Задания и их решения.
Ответы на контрольные вопросы.
Общий вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1Что называется производной функции?

2 Сформулируйте правила дифференцирования.

3 Что такое сложная функция?

4 Как найти производную сложной функции?

Суть метода логарифмического дифференцирования

Логарифмическим дифференцированием называется метод дифференцирования функций, при котором сначала находится логарифм функции, а затем вычисляется производная от него. Такой прием можно использовать для нахождения производных степенных, рациональных и некоторых иррациональных функций.

Рассмотрим этот подход более детально. Пусть дана функция y=f(x). Возьмем натуральные логарифмы от обеих частей:lny=lnf(x).Теперь продифференцируем это выражение как сложную функцию, имея ввиду, что y - это функция от x.$(\ln y)'=(\ln f(x))',\Rightarrow 1 y y'(x)=(\ln f(x))'$.Отсюда видно, что искомая производная равна$y'=y(\ln f(x))'=f(x)(\ln f(x))'$.Такая производная от логарифма функции называется *логарифмической производной*.

Данный метод позволяет также эффективно вычислять производные *показательно-степенных функций*, то есть функций вида$y=u(x)v(x)$,где $u(x)$ и $v(x)$ − дифференцируемые функции от x.

В приведенных ниже примерах вычислить производную функции $y(x)$, используя логарифмическое дифференцирование.

$y=xx, x>0$.

Решение.

Сначала прологарифмируем левую и правую части уравнения:$\ln y=\ln xx,\Rightarrow \ln y=x\ln x$.Теперь продифференцируем обе части, имея ввиду, что y − это функция от x:$(\ln y)'=(x\ln x)',\Rightarrow 1y\cdot y'=x'\ln x+x(\ln x)',\Rightarrow y'y=1\cdot \ln x+x\cdot 1x,\Rightarrow y'y=\ln x+1,\Rightarrow y'=y(\ln x+1),\Rightarrow y'=xx(\ln x+1)$,где$x>0$.

$y=(x-1)2(x-3)5$

Решение.

Прологарифмируем сначала обе части:$\ln y=\ln[(x-1)2(x-3)5],\Rightarrow \ln y=\ln(x-1)2+\ln(x-3)5,\Rightarrow \ln y=2\ln(x-1)+5\ln(x-3)$.Теперь легко найти логарифмическую производную:$(\ln y)'=[2\ln(x-1)+5\ln(x-3)]',\Rightarrow 1y\cdot y'=2\cdot 1x-1+5\cdot 1x-3,\Rightarrow y'=y(2x-1+5x-3)$или$y'=(x-1)2(x-3)5(2x-1+5x-3)$.В этом примере предполагается, что $x>3$.

$y=\sqrt{\boxed{(x+1)(x-2)x}}$

Решение.

Будем рассматривать данную функцию при $x>2$.

Тогда логарифмируя левую и правую части равенства, имеем:$\ln y=\ln\sqrt{\boxed{(x+1)(x-2)x}}$,

$\Rightarrow \ln y=12[\ln(x+1)+\ln(x-2)-\ln x]$.Дифференцируя, находим производную y' :$(\ln y)'=(12[\ln(x+1)+\ln(x-2)-\ln x])',\Rightarrow$

$y'y=12(1x+1+1x-2-1x),\Rightarrow y'y=12\cdot x(x-2)+x(x+1)-(x+1)(x-2)x(x+1)(x-2),\Rightarrow$

$y'y=12\cdot x2-2x+x2+x-x2-x+2x+2x(x+1)(x-2),\Rightarrow y'y=12\cdot x2+2x(x+1)(x-2),\Rightarrow$

$y'=12\sqrt{\boxed{(x+1)(x-2)x}}\cdot x2+2x(x+1)(x-2),\Rightarrow y'=x2+22\sqrt{\boxed{x3(x+1)(x-2)}}$.

Практическая работа

«Составление уравнений сферы, плоскости, прямой»

Цели : научиться составлять уравнение сферы, решать задачи с использованием уравнения сферы

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1.

Задание 1

Треугольник задан вершинами $A(-3; -3)$, $B(-4; 5)$, $C(3; 1)$. Выполнить чертеж.

1) Составить уравнения сторон треугольника;

2) Составить уравнение медианы BD;

3) Найти угол наклона прямой AC к оси Ox.

Задание 2

Привести уравнение прямой к каноническому виду $l: 2x + 3y - 18 = 0$

Задание 3

Точка, двигаясь прямолинейно, прошла через положения $A(-1; 6)$, $B(3; -2)$. В каких точках она пересечет оси координат?

Задание 4

Вычислить длину отрезка прямой $l: 3x - 4y + 12 = 0$, заключенного между осями координат.

Задание 5

На прямой $l: 2x - 3y + 6 = 0$ найдите точку M, равноудаленную от точек $A(3; 0)$, $B(5; 2)$.

Задание 6

1. Составьте уравнение сферы с центром O (2; 3; 4) и радиусом R=5.

2. Точки A(7; -2; 4) и B(9; -8; 6) лежат на поверхности сферы и на прямой, проходящей через её центр. Составьте уравнение сферы.

Вариант 2.

Задание 1

Треугольник задан вершинами $A(4; -2)$, $B(-4; 2)$, $C(2; 5)$. Выполнить чертеж.

1) Составить уравнения сторон треугольника;

2) Составить уравнение медианы CD;

3) Найти угол наклона прямой BC к оси Ox.

Задание 2

Привести уравнение прямой к каноническому виду $l: 3x + 7y - 42 = 0$

Задание 3

Прямая, проходящая через точку $(-2; -1)$, отсекает на оси Ох отрезок $a = 4$. Составьте уравнение этой прямой (в общем виде).

Задание 4

Вычислить длину отрезка прямой $l: 3x + 4y + 24 = 0$, заключенного между осями координат.

Задание 5

На прямой $l: 2x + y - 2 = 0$ найдите точку М, равноудаленную от точек $A(0; 6)$, $B(1; 5)$.

Задание 6

1. Составьте уравнение сферы с центром О (-3; 0; 4) и радиусом ￼ .

2. Сфера имеет центр в точке С(2; -1; 3) и проходит через начало координат. Составьте уравнение сферы.

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе

Контрольные вопросы

1. Что называют сферой?

2. Вращением какой плоской фигуры можно подучить сферу?

3. Что называют диаметром сферы?

4. Какая фигура получается при пересечении сферы и плоскости, двух сфер?

5. Запишите уравнение сферы.

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с

2Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352

3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил. –

Приложение:

Общее уравнение прямой имеет вид: $Ax+By+C=0$, где A, B, C – некоторые числа. При этом коэффициенты A, B *одновременно* не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.

1. **Уравнение прямой по точке и направляющему вектору:**

Если известна некоторая точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\bar{p}(p_1; p_2)$ этой прямой, то уравнение данной прямой можно составить по формуле:

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$$

Иногда его называют ***каноническим уравнением прямой***.

2. **Общее уравнение плоскости:**

Общее уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$, где коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю.

3. **Уравнение плоскости по трём точкам:**

Любые ли три точки пространства задают плоскость? Нет. Во-первых, точки должны быть различными. А во-вторых, они не должны лежать на одной прямой (сразу все три).

Уравнение плоскости, проходящей через

три различные точки $M_0(x_0;y_0;z_0), M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$, которые не лежат на одной прямой, **можно составить по формуле**:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

4. Уравнение поверхности сферы:

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.
Данная точка называется центром шара, а …
данное расстояние – радиусом шара.
Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется ***диаметром*** сферы.
Пусть центр сферы, точка *O*, имеет координаты $(x_0;y_0;z_0)$, радиус сферы равен *R*. Если точка $M(x;y;z)$ лежит на данной сфере, то расстояние между точками *O* и *M* равно:

$$OM = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Так как $OM = R$, то

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R,$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2.$$

Последнее уравнение называют уравнением сферы радиуса *R* с центром в точке $(x_0;y_0;z_0)$.

Сфера радиуса R с центром в начале координат представлена уравнением второй степени.
$x^2+y^2+z^2=R^2$ (R – радиус сферы)

Сфера радиуса R центр которой не совпадает с началом координат представлена другим уравнением второй степени.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

(R - радиус сферы; a, b, c - смещение центра сферы относительно центра координат)

Пример: Найти уравнение прямой, проходящей через две точки: (-1, 2) и (2, 1).
Решение.

По уравнению $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

полагая в нем $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$ (без разницы, какую точку считать первой, какую - второй), получим

$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x+1}{2+1}$, или $\frac{y-2}{-1}=\frac{x+1}{3}$; после упрощений получаем окончательно искомое уравнение в виде $x + 3y - 5 = 0$.

Применение изученного материала к решению заданий

Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса R = 5 с центром в начале координат.

Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке С (2; —3; 5) и радиусом, равным 6.

Задача 3. Найти центр и радиус сферы $(x + 4)^2 + (y — 3)^2 + z^2 =100$.

Задача 4. Доказать, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 — 2x + 4y — 6z + 5 = 0$$

является уравнением сферы.

Задача 5. Составить уравнение плоскости по точкам $M_0(1; -2; 0), M_1(2; 0; -1), M_2(0; -1; 2)$.

$5x - y + 3z - 7 = 0$

Задача 6. Составить уравнение прямой по точке $M(1; 2)$ и направляющему вектору $\bar{p}(2; 1)$

$x - 2y + 3 = 0$

Задача 7. Составить уравнение прямой по точке $M(0; -3)$ и направляющему вектору $\bar{p}(-7; 5)$

Задача 8. Составить уравнение прямой по точке $A(0; 3)$ и направляющему вектору $\bar{j}(0; 1)$.

Задача 9. Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right), B(-1; 7)$.

$AB: 28x + 15y - 77 = 0$

Ответы (один из вариантов решений):

Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса R = 5 с центром в начале координат.

Решение: Непосредственной подстановкой значения радиуса в уравнение

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ получим $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке С (2; —3; 5) и радиусом, равным 6.

Решение: Подставив значение координат точки С и значение радиуса в уравнение

$(x — a)^2 + (y — b)^2 + (z — c)^2 = R^2$ получим

$(x — 2)^2 + (y + 3)^2 + (z — 5)^2 = 36$.

Задача 3. Найти центр и радиус сферы $(x + 4)^2 + (y — 3)^2 + z^2 =100$.

Решение: Сравнивая данное уравнение с уравнением сферы

$(x — a)^2 + (y — b)^2 + (z — c)^2 = R^2$ видим, что

$a = — 4$, $b = 3$, $c = 0$, R =10. Следовательно, С(—4; 3; 0), R = 10.

Задача 4. Доказать, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 — 2x + 4y — 6z + 5 = 0$$

является уравнением сферы.

Решение: Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив квадраты двучленов, содержащих соответственно x, y и z:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 5 =$$
$$= (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 3)^2 - 9 + 5 =$$
$$= (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 9.$$

Следовательно, данная поверхность имеет уравнение

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9.$$

Это уравнение представляет собой уравнение сферы с центром в точке С(1; —2; 3) и радиусом R = 3

Задача 5. Составить уравнение плоскости по точкам $M_0(1; -2; 0), M_1(2; 0; -1), M_2(0; -1; 2)$.

Решение: составим уравнение плоскости по трём точкам. Используем формулу:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & 0-1 \\ y-(-2) & 0-(-2) & -1-(-2) \\ z-0 & -1-0 & 2-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+2 & 2 & 1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Вот теперь и аналитически видно, что всё дело свелось к координатам двух векторов. Раскрываем определитель по первому столбцу, находим уравнение плоскости:

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4+1)(x-1) - (2-1)(y+2) + (1+2)z = 0$$

$$5(x-1) - (y+2) + 3z = 0$$

$$5x - 5 - y - 2 + 3z = 0$$

$$5x - y + 3z - 7 = 0$$

Больше ничего упростить нельзя, записываем:

Ответ: $5x - y + 3z - 7 = 0$

Задача 6. Составить уравнение прямой по точке $M(1; 2)$ и направляющему вектору $\bar{p}(2; 1)$

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $\dfrac{x-x_0}{p_1} = \dfrac{y-y_0}{p_2}$. В данном случае:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}$$

С помощью свойств пропорции избавляемся от дробей:

$$1\cdot(x-1) = 2\cdot(y-2)$$

И приводим уравнение к общему виду:

$$x - 1 = 2y - 4$$

$$x - 2y + 3 = 0$$

Ответ: $x - 2y + 3 = 0$

Задача 7. Составить уравнение прямой по точке $M(0; -3)$ и направляющему вектору $\bar{p}(-7; 5)$

Решение: *Уравнение прямой составим по формуле:*

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$$

$$\frac{x-0}{-7}=\frac{y-(-3)}{5}$$

$$5x=-7(y+3)$$

$$5x=-7y-21$$

$$5x+7y+21=0$$

Ответ: $5x+7y+21=0$

Задача 8. Составить уравнение прямой по точке $A(0;3)$ и направляющему вектору $\bar{j}(0;1)$.

Решение: *Используем формулу:*

$$p_2\cdot(x-x_0)=p_1\cdot(y-y_0)$$

$$1\cdot(x-0)=0\cdot(y-1)$$

$$x=0$$

Ответ: $x=0$ *(ось ординат)*

Задача 9. Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2};\frac{7}{3}\right), B(-1;7)$.

Решение: Используем формулу:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-1-\frac{3}{2}}=\frac{y-\frac{7}{3}}{7-\frac{7}{3}}$$

Выполняем действия в знаменателях:

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}}=\frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{14}{3}}$$

Применяем метод пропорции:

$$\frac{14}{3}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}\cdot\left(y-\frac{7}{3}\right)$$

Именно сейчас удобно избавиться от дробных чисел. В данном случае нужно умножить обе части на 6:

$$6\cdot\frac{14}{3}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}\cdot 6\cdot\left(y-\frac{7}{3}\right)$$

$$28\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=-15\cdot\left(y-\frac{7}{3}\right)$$

Раскрываем скобки и решаем уравнение:

$$28x-42=-15y+35$$

$$28x-42+15y-35=0$$

Ответ: $AB: 28x+15y-77=0$

Практическая работа
Тема: Исследование прямой и плоскости на параллельность и перпендикулярность. Расстояние от точки до прямой.

Цель:

1) Обобщить теоретические знания по теме: «Перпендикулярность прямых. Перпендикулярность прямой и плоскости».

2) Рассмотреть алгоритмы решений заданий теме «Перпендикулярность прямых. Перпендикулярность прямой и плоскости», решить задачи.

3) Формировать умения прогнозировать собственную деятельность, умение организовать свою деятельность и анализировать ее.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1.

1.В треугольнике АВС середины сторон АВ и ВС лежат в плоскости α, а сторона АС не лежит в этой плоскости. Докажите, сто прямая АС параллельна плоскости α.

2. Известно, что прямые a и b параллельны, прямая а перпендикулярна плоскости α, прямая с лежит в плоскости α. Каково взаимное расположение прямых b и с? Сделайте чертеж и обоснуйте ответ

3. Дан прямоугольник со сторонами 3 и 4см, в точке пересечения диагоналей прямоугольника восстановлен перпендикуляр к плоскости прямоугольника, длина которого 7см. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до вершин прямоугольника.

Вариант 2.

1.Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выпишите: а) две пары ребер, принадлежащих параллельным прямым; б) две пары ребер, принадлежащих скрещивающимся прямым; в) две пары граней, принадлежащих параллельным плоскостям.

2. Длина наклонной 18 см. Угол между наклонной и плоскостью 30^0. Чему равна длина проекции наклонной на эту плоскость?

3. Дан прямоугольный треугольник со сторонами 3 и 4см, в вершине острого угла восстановлен перпендикуляр к плоскости треугольника, длина которого 7см. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до вершин треугольника.

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе

Контрольные вопросы

1 . Что такое стереометрия?

2. Сформулируйте аксиомы стереометрии.

3. Какие прямые в пространстве называются параллельными?

4. Какие прямые называются скрещивающимися?

5. Что значит: прямая и плоскость параллельны?

6. Признак параллельности прямой и плоскости.

7. Какие плоскости называются параллельными? Докажите призрак параллельности плоскостей.

9. Докажите, что если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

10. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны.

11. Перечислите случаи взаимного расположения в пространстве: а) двух прямых; б) прямой и плоскости; в) двух плоскостей.

12. Перечислите свойства параллельного проектирования.

13. Что называется углом между: а) двумя прямыми; б) прямой и плоскостью;

в) между

двумя плоскостями?

14. Дайте определение: а) двугранного угла; б) линейного угла двугранного угла.

15. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?

16. Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.

17.Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.

18. Сформулируйте теоремы о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве.

19. Что такое перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость?

20. Что называется расстоянием от точки до плоскости ?

21. Что такое наклонная, проведенная из данной точки к плоскости? Что такое проекция наклонной?

22. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах.

1. Установите взаимное расположение пар прямых d_1 и d_2:

а) $d_1 : x + y - 3 = 0,\quad d_2 : 2x - 2y - 6 = 0;$

б) $d_1 : y = 2x + 5,\quad d_2 : 4x - 2y - 10 = 0$.

Даны уравнения двух смежных сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$, а также координаты точки $P(3, -1)$ – пересечения его диагоналей. Напишите уравнения двух других сторон, если: $AB : x - y - 1 = 0,\quad AD : x + 2y = 0$.

Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых d_1 и d_2 и параллельной прямой d_3, если: $d_1 : 5x - y + 10 = 0,\quad d_2 : 8x + 4y + 9 = 0,\quad d_3 : x + 3y = 0$.

Напишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $d_1 : y = 7x - 4$ и $d_2 : 2x + y - 5 = 0$ и образующей угол $\varphi = 60^0$ с осью Ox. Репер ортонормированный.

Найдите уравнение прямой, параллельной прямой $d : 3x + 4y - 7 = 0$ и отстоящей от нее на расстоянии, равном три единицы.

Найдите координаты точки, симметричной точке $A(2, 3)$ относительно прямой $2x - y + 6 = 0$.

Заданы две прямые $d_1 : x + y - 2 = 0$ и $d_2 : y - 3 = 0$. Найдите уравнения биссектрис углов, образованными этими прямыми.

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с

2Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352

3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил. –

Приложение:

Определение Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения.

Теорема 1 *ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.* Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

Теорема 2 *1-ое СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ*. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Теорема 3 *2-ое СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ*. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Пример 1: Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Решение: пусть а - прямая и А - точка на ней. Возьмем любую точку Х вне прямой а и проведем через эту точку и прямую а плоскость . В плоскости через точку А можно провести прямую b, перпендикулярную а.

Пример 2: Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости .

Решение: Проведем в плоскости две пересекающиеся прямые c и b. Через точку их пересечения проведем плоскости и перпендикулярные прямым b и ссоответственно. Они пересекаются по некоторой прямой a. Прямая a перпендикулярна прямым bи c, значит и плоскости . Проведем теперь через точку A прямую d, параллельную a. По теореме 2 она перпендикулярна плоскости .

Пример 3: Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

Решение: Пусть a - данная прямая и - данная плоскость. Возьмем на прямой a две произвольные точки X и Y. Их расстояния до плоскости - это длины перпендикуляров XX_1и YY_1, опущенных на эту плоскость. По теореме 3 прямые XX_1 и YY_1 параллельны, следовательно, лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскость по прямойX_1Y_1.Прямая a параллельна прямой X_1Y_1, так как не пересекает содержащую её плоскость . Итак у четырехугольника XX_1YY_1противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм, а значит$XX_1=YY_1$. Задачи для самостоятельного решения

Задача №1: плоскости равностороннего треугольника ABC и квадратаBCDE перпендикулярны. Найдите расстояние от точки A до стороны DE, если AB.

Задача №2: 1.Диагональ BD ромба ABCD перпендикулярна к плоскости α. Как расположена по отношению к этой плоскости другая её диагональ?

Задача №3: Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных на расстояние 4 м, соединены перекладиной. Высота одного столба 5 м, а другого - 8 м. Найдите длину перекладины.

Практическая работа

Тема: Тема: Составление уравнений кривых второго порядка: окружности ,гиперболы, параболы и эллипса, их построение.

Цель занятия:

1)изучить различные виды кривых второго порядка;

2)научиться составлять уравнения окружности и эллипса, выполнять построение заданных окружностей и эллипсов на плоскости.

3)научиться составлять уравнения гиперболы и параболы, выполнять построение заданных кривых на плоскости

Оборудование

ПК, электронное учебное пособие, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работыг

Вариант 1

1.Составьте уравнение окружности с центром в точке (-2;5)и радиусом равным $\sqrt{5}$.

2. Постройте окружность заданную уравнением $x^2+y^2-10x-6y-2=0.$

3. а) Найдите координаты фокусов, длинны осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением 16 x^2+25y^2 =400;

б) Постройте данный эллипс.

4.а) Найдите длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением $7x^2-9y^2=63.$

б) Постройте данную гиперболу.

5.Составьте уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси OX и проходящей через точку A (-10; 8).

6.Составьте каноническое уравнение параболы и уравнение её директрисы, если фокус параболы F(-2; 0).

Вариант 2

1.Составьте уравнение окружности с центром в точке (3;-6)и радиусом равным 2 $\sqrt{3}.$

2. Постройте окружность заданную уравнением $x^2+y^2+8x+7=0.$

3. а) Составьте уравнение эллипса, координаты фокусов которого (-7;0), (7;0), а эксцентриситет равен 0 , 28.

б) Постройте данный эллипс.

4. Составьте каноническое уравнение гиперболы, если её фокусы лежат на оси ОУ, эксцентриситет равен 1,4,а длинна большей осиравна10.

5.Составьте уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси ОХ и проходящей через точку В(-7; -3).

6.а) Найдите координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением y^2 =24х.

б) Постройте данную параболу и её директрису.

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе.

Литература

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. М.: Издательский центр «Академия», 2009, стр.72-73.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс, 2009, стр.62-66.

Контрольные вопросы

1. Какие кривые второго порядка вы знаете?
2. Как записать параметрическое уравнение окружности?
3.Как записать параметрическое уравнение эллипса?
4. Что называют фокусами, большой и малой осью, эксцентриситетом эллипса?
5.Как записать параметрическое уравнение гиперболы?
6.Как записать параметрическое уравнение параболы?
7. Что называют фокусами, большой и малой осью, эксцентриситетом параболы?
8.Что называют фокусами, большой и малой осью, эксцентриситетом гиперболы?

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с

2Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352

3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил.

3. Сборник задач по математике. Часть 1. Под ред А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича.

Приложения.

Линии, задаваемые уравнениями вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Дx + Ey + T = 0$$,

называются кривыми второго порядка. За исключением вырожденных случаев имеется всего 3 кривых второго порядка: эллипс (частный случай - окружность), гипербола и парабола, они имеют следующие канонические уравнения и вид.

1. ***Окружность***

Окружностью радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется множество точек плоскости удаленных от точки M_0 на расстоянии R .

Уравнение окружности имеет вид: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. (4.13)

В частности, полагая, $x_0 = 0$ *и* $y_0 = 0$ получим уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$.

1. ***Эллипс***

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ (4.14)

Здесь

a, b - полуоси эллипса; O (0; 0) – центр эллипса. c - половина расстояния между фокусами. Вершины эллипса $A_1(-a;0);\ A_2(a;0);\ B_1(0;-b);\ B_2(0;b)$.

Фокусы $F_1(-c;0)$ *и* $F_2(c;0)$, *где* $c=\sqrt{a^2-b^2}$, *если* $a>b$. -

Прямые $x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2-s^2}}$ называются директрисами эллипса.

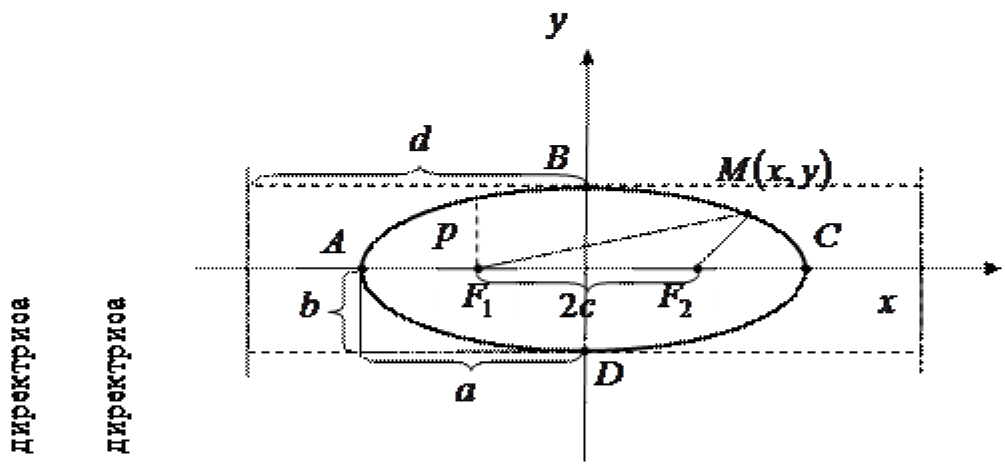


Рис. 4.6

Форму эллипса характеризует отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon < 1$,
называемое ***эксцентриситетом*** эллипса. Чем меньше эксцентриситет, тем меньше вытянут эллипс вдоль фокальной оси, т.е. оси на которой лежат фокусы.

В предельном случае при $\varepsilon = 0$ эллипс переходит в окружность.

Если в каноническом уравнении эллипса $a < b$, то фокусы располагаются на оси ОУ и имеют координаты $F_1(0;-c)$ *и* $F_2(0;c)$, *где* $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

1. ***Гипербола***

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4.15)$$

Здесь a - действительная полуось гиперболы, b - мнимая полуось гиперболы.

Точки $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$ - вершины гиперболы.

Фокусы гиперболы $F_1(-c;\ 0)$ *и* $F_2(c;\ 0)$, *где* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Гипербола имеет две асимптоты $y = -\frac{b}{a}x$ *и* $y = \frac{b}{a}x$.

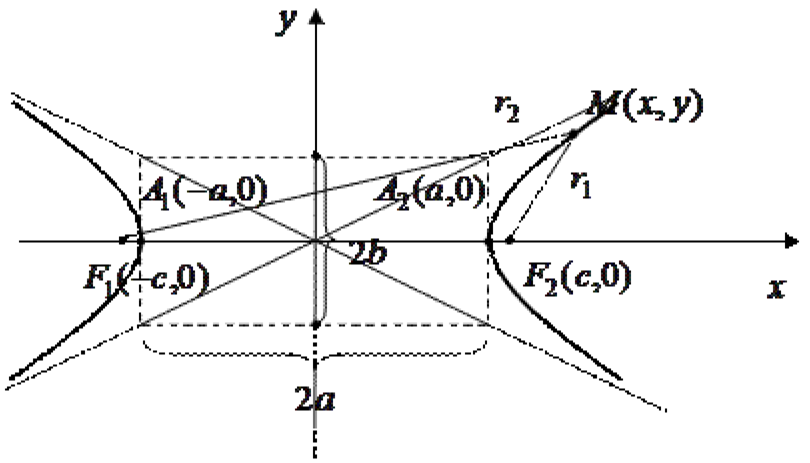


Рис. 4.7

Для построения гиперболы сначала строят основной прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \pm a;\ y = \pm b$, затем проводят его диагонали, которые совпадают с асимптотами гиперболы.

Форму гиперболы характеризует эксцентриситет $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$. Чем меньше эксцентриситет, тем более вытянут её основной в направлении фокальной оси.

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ называется сопряженной к гиперболе (4.15).

Здесь a - мнимая полуось гиперболы, b - действительная полуось гиперболы Вершины сопряженной гиперболы $B_1(0;-b);\ B_2(0;b)$ и фокусы $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$ лежат на оси OY.

4. Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от фиксированной точки, называемой ***фокусом*** и данной прямой, называемой ***директрисой.*** Расстояние от фокуса F до директрисы, называется ***параметром*** параболы и обозначается через $p\ (p > 0)$.

Каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 2px$, где $x \geq 0$. (4.16)

Точка $O(0,0)$ - вершина параболы, ось OX - ось симметрии параболы.

Фокус $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ и уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$.

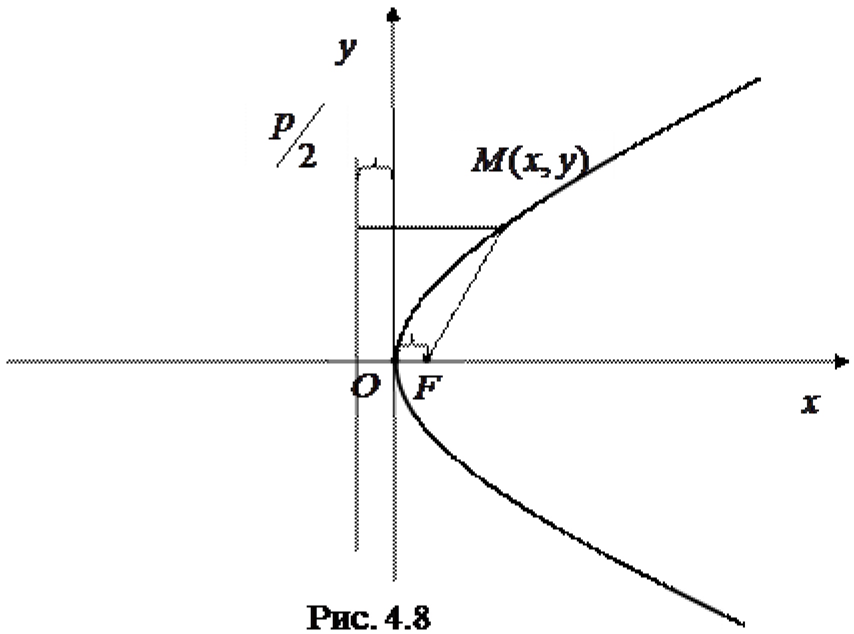
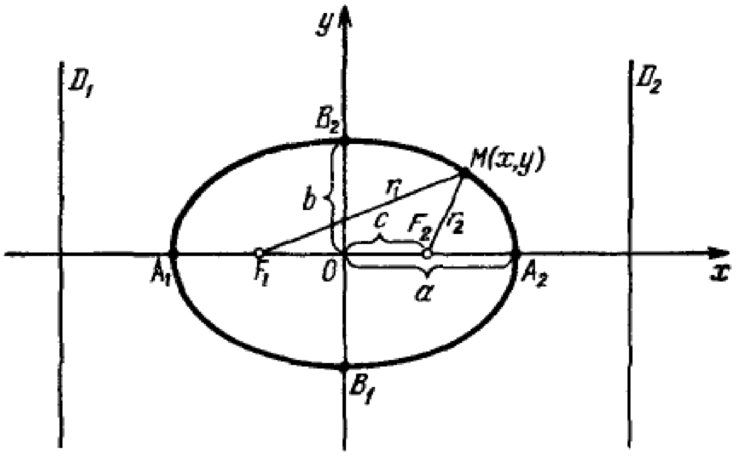


Рис. 4.8

Парабола $x^2 = 2py$ располагается симметрично относительно оси OY .



Практическая работа

Тема: Перпендикулярность прямой и плоскости

Цель занятия. Находить уравнение прямой, уравнение плоскости, угол между прямыми, между плоскостями.

Оборудование ПК, медиа-презентация, раздаточный материал.

Задания для практической работы

Вариант 1.

Решить следующие задачи.

1) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; 3; 6)$ перпендикулярно плоскостям $2x+3y-2z-4=0$ и $3x+5y+z=0$.

2) Вычислить угол между прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{2}$ и плоскостью $x + 2y - 3z + 4 = 0$,

3)Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М $(-1; 2; -3)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{2}$.

2 вариант

Решить следующие задачи.

1) Через точку М (1; 3; 2;) провести прямую, перпендикулярно плоскости $x - 2y + 2z - 3 = 0$, Вычислите направляющие косинусы этой прямой.

2) Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{5}$ с плоскостью

$$x + 2y - 3z - 4 = 0,$$

3) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; 3; 6)$ перпендикулярно плоскостям $2x+3y-2z-4=0$ и $3x+5y+z=0$.

Пояснения к работе

Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Содержание отчета

Название работы.

Цель работы.

Задания и их решения.

Ответы на контрольные вопросы.

Общий вывод по проделанной работе

Контрольные вопросы

1 Записать общее уравнение прямой на плоскости; общее уравнение

прямой в пространстве;

2 Записать общее уравнение плоскости;
3 Как вычисляется угол между плоскостями?
4 Условие параллельности 2-х прямых на плоскости
5 Условие параллельности 2-х плоскостей
6 Записать уравнение прямой в пространстве
7 Условие параллельности 2-х прямых в пространстве.

Литература:

1. Дадаян, А.А. Математика:учебник./А.А. Дадаян.-3-е изд.-М.:ФОРУМ, 2011.-544с
2Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие/А.А. Дадаян.-М.:ФОРУМ:ИНФРА-М,2011.-352
3. Антонов,В.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. / В.И Антонов, Ф.И. Копелевич.- СПб.: Издательство "Лань", 2013. -112с.: ил. –

Приложение:

Линейная функция, её свойства и график.

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, заданная на множестве всех действительных чисел. Здесь k – угловой коэффициент (действительное число), b – свободный член (действительное число), x – независимая переменная.

В частном случае, если $k = 0$, получим постоянную функцию $y = b$, график которой есть прямая, параллельная оси Ox, проходящая через точку с координатами (0; b).

Если $b = 0$, то получим функцию $y = kx$, которая является прямой пропорциональностью.

Геометрический смысл коэффициента b – длина отрезка, который отсекает прямая по оси Oy, считая от начала координат.

Геометрический смысл коэффициента k – угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox, считается против часовой стрелки.

Свойства линейной функции:

1) Область определения линейной функции есть вся вещественная ось;

2) Если $k \neq 0$, то область значений линейной функции есть вся вещественная ось. Если $k = 0$, то область значений линейной функции состоит из числа b;

3) Четность и нечетность линейной функции зависят от значений коэффициентов k и b.

a) $b \neq 0$, $k = 0$, следовательно, $y = b$ – четная;

b) $b = 0$, $k \neq 0$, следовательно $y = kx$ – нечетная;

c) $b \neq 0$, $k \neq 0$, следовательно $y = kx + b$ – функция общего вида;

d) $b = 0$, $k = 0$, следовательно $y = 0$ – как четная, так и нечетная функция.

4) Свойством периодичности линейная функция не обладает;

5) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y = kx + b = 0$, $x = -b/k$, следовательно $(-b/k; 0)$ – точка пересечения с осью абсцисс.

Oy: $y = 0k + b = b$, следовательно $(0; b)$ – точка пересечения с осью ординат.

Замечание.Если $b = 0$ и $k = 0$, то функция $y = 0$ обращается в ноль при любом значении переменной x. Если $b \neq 0$ и $k = 0$, то функция $y = b$ не обращается в ноль ни при каких значениях переменной x.

6) Промежутки знакопостоянства зависят от коэффициента k.

a) $k > 0$; $kx + b > 0$, $kx > -b$, $x > -b/k$.

$y = kx + b$ – положительна при x из $(-b/k; +\infty)$,

$y = kx + b$ – отрицательна при x из $(-\infty; -b/k)$.

b) $k < 0$; $kx + b < 0$, $kx < -b$, $x < -b/k$.

$y = kx + b$ – положительна при x из $(-\infty; -b/k)$,

$y = kx + b$ – отрицательна при x из $(-b/k; +\infty)$.

c) $k = 0$, $b > 0$; $y = kx + b$ положительна на всей области определения,

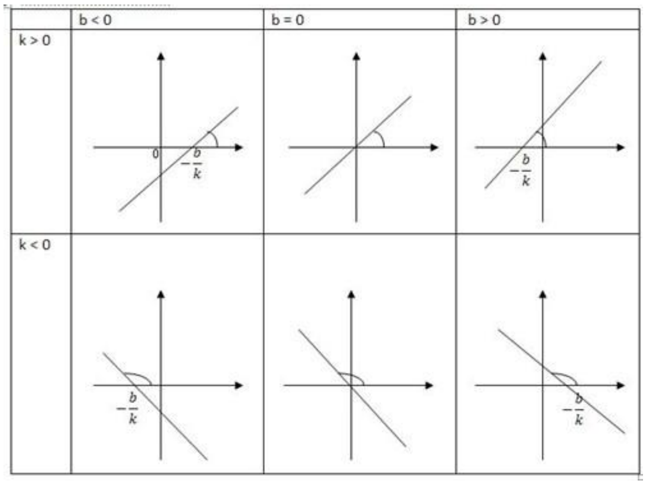
$k = 0$, $b < 0$; $y = kx + b$ отрицательна на всей области определения.

7) Промежутки монотонности линейной функции зависят от коэффициента k.

$k > 0$, следовательно $y = kx + b$ возрастает на всей области определения,

$k < 0$, следовательно $y = kx + b$ убывает на всей области определения.

8) Графиком линейной функции является прямая. Для построения прямой достаточно знать две точки. Положение прямой на координатной плоскости зависит от значений коэффициентов k и b. Ниже приведена таблица, которая наглядно это иллюстрирует рисунок 1.



Общее уравнение прямой на плоскости.

Ax + By + C = 0

Признаки параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости

<u>Определение</u>. Прямая, проходящая через точку M1 (x1 , y1) и перпендикулярная к прямой y = kx + b представляется уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

Две прямые параллельны, если k1 = k2 . Две прямые перпендикулярны, если k1 = -1/ k2 .

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Пусть в пространстве заданы две точки M 1 (x 1 , y 1 , z 1) и M2 (x 2, y 2 , z 2), тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Угол между заданными прямыми.

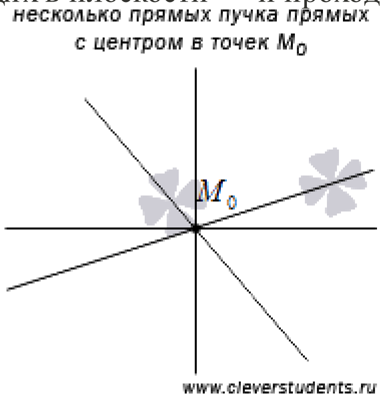
Определение. Если заданы две прямые y = k1 x + b1 , y = k 2x + b2 , то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

Пучок прямых.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

В заданной плоскости γ **пучком прямых с центром в точке *M_0*** называют множество всех прямых, лежащих в плоскости γ и проходящих через точку M_0.



.